

С.В.Прокопов

**ЭКОНОМИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ПРОИЗВОДСТВЕННОМ
МЕНЕДЖМЕНТЕ**

Учебник

Издание второе

**КНЕВ
2017**

УДК 519.86:65.012.32](075.8)
ББК 22.18 я73+65.290-2я73
П80

Автор – *Прокопов Сергей Васильевич*, доцент кафедры менеджмента Киевского национального университета технологий и дизайна, кандидат технических наук

Рецензенты:

А.М. Онищенко, доктор экономических наук, профессор, академик НАН Украины;

Л.К. Безчастный, доктор экономических наук, профессор, член-корресподент НАН Украины;

В.А. Точилин, доктор экономических наук, профессор

Прокопов С.В. Экономико-математическое моделирование **П80** в производственном менеджменте: Учебник. – К.: ИМСО, 2017. – 438 с.: ил. – Библиогр.: с. 435 – 437.
ISBN 966-02-3650-6

В учебнике изложены наиболее важные теоретические и методологические аспекты экономико-математического моделирования в менеджменте промышленного производства. Основное внимание уделено вопросам построения экономико-математических моделей оптимизационных задач, а также методов их решения. Рассмотрено большое количество моделей, начиная с момента постановки задачи до проверки и анализа результатов полученных решений.

Предназначен для студентов высших учебных заведений, которые обучаются по экономическим специальностям, а также аспирантов и менеджеров.

УДК 519.86:65.012.32](075.8)
ББК 22.18 я73+65.290-2 я73

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Предисловие</i>	7
Раздел I Введение в экономико-математическое моделирование	10
Глава 1 Предмет и метод моделирования	
§ 1.1. Предмет и задачи курса	11
§ 1.2. Этапы моделирования	16
§ 1.3. Из истории моделирования	22
Глава 2 Классификация моделей и типы задач	
§ 2.1. Классификация моделей	31
§ 2.2. Методы решения задач	39
§ 2.3. Типы производственных задач	48
Раздел II Методы и приемы экономико-математического моделирования	58
Глава 3 Методы и приемы моделирования	
§ 3.1. Методы построения моделей	59
§ 3.2. Метод структурного моделирования	66

СОДЕРЖАНИЕ

§ 3.3. Декомпозиционный и композиционный подходы . . .	71
Глава 4 Построение оптимизационных моделей	
§ 4.1. Методы линейного моделирования	75
§ 4.2. Приемы линейного моделирования	81
§ 4.3. Построение блочной модели	91
Раздел III Решение оптимизационных задач и анализ полученных результатов	98
Глава 5 Решение оптимизационных задач	
§ 5.1. Решение задач на компьютере	99
§ 5.2. Интерфейс с пользователем	105
§ 5.3. Нахождение оптимального решения	109
Глава 6 Анализ результатов расчетов	
§ 6.1. Постоптимизационный анализ	117
§ 6.2. Анализ чувствительности модели	124
§ 6.3. Чувствительность двойственной модели	131
Раздел IV Моделирование оптимального распределения ресурсов	138
Глава 7 Моделирование загрузки мощностей	
§ 7.1. Оптимизация загрузки оборудования	139
§ 7.2. Оптимизация загрузки оборудования цеха	142
§ 7.3. Оптимизация загрузки оборудования предприятия	151
Глава 8 Моделирование распределения ресурсов	
§ 8.1. Оптимальное распределение ресурсов	157
§ 8.2. Распределение ресурсов внутри цеха	160
§ 8.3. Распределение ресурсов на предприятии	167

**Раздел V Моделирование размещения
и развития производства** 176**Глава 9 Моделирование размещения производства**

- § 9.1. Моделирование размещения предприятия 177
- § 9.2. Модель многоэтапного размещения производства... 182
- § 9.3. Модель размещения многопрофильного производства 188

Глава 10 Моделирование развития предприятия

- § 10.1. Моделирование альтернатив развития 195
- § 10.2. Модель инвестирования в развитие производства .. 202
- § 10.3. Модель инвестирования в развитие отрасли 208

**Раздел VI Оптимизация ассортимента продукции
промышленного производства** 214**Глава 11 Оптимизация ассортимента продукции**

- § 11.1. Моделирование специализации предприятия 215
- § 11.2. Оптимизация ассортимента продукции 221
- § 11.3. Моделирование диверсификации производства 229

Глава 12 Многокритериальные модели

- § 12.1. Многокритериальность моделей 235
- § 12.2. Многокритериальность выбора 241
- § 12.3. Решение многокритериальной задачи 248

**Раздел VII Моделирование оптимального состава
и рационального раскроя материалов** .. 256**Глава 13 Моделирование оптимального состава**

- § 13.1. Оптимизация состава смесей 257
- § 13.2. Оптимизация состава сплавов 262
- § 13.3. Оптимизация состава растворов 267

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 14 Моделирование рационального раскроя

- § 14.1. Модель одномерного раскроя 275
- § 14.2. Модель раскроя листовых материалов 281
- § 14.3. Модель раскроя рулонных материалов 286

Раздел VIII Параметрические и динамические модели производства 292

Глава 15 Параметрические модели производства

- § 15.1. Параметрическая оптимизация ресурсов 293
- § 15.2. Прогнозирование параметров моделей 300
- § 15.3. Параметры корреляции и классификации 310

Глава 16 Динамические модели производства

- § 16.1. Модель запуска партий деталей 325
- § 16.2. Модель замены оборудования 332
- § 16.3. Модель выбора проектов 339

Раздел IX Модели управления запасами и массового обслуживания 350

Глава 17 Модели управления запасами

- § 17.1. Общая модель управления запасами 351
- § 17.2. Оптимизация текущих запасов 358
- § 17.3. Оптимизация страховых запасов 363

Глава 18 Модели массового обслуживания

- § 18.1. Особенности формализации моделей 371
- § 18.2. Постановка задач массового обслуживания 381
- § 18.3. Решение задач массового обслуживания 387

Словарь терминов 399

Список литературы 433

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие современного промышленного производства, увеличение масштабов выпуска продукции, расширение ее ассортимента требует решения ряда сложных задач. В настоящее время становится достаточно очевидным, что полагаться лишь на опыт и здравый смысл при принятии ответственных решений уже недостаточно, необходимы глубокие расчеты. В этой связи все более возрастает роль экономико-математического моделирования как эффективного инструмента экономических исследований.

Интерес к экономико-математическому моделированию в последнее время заметно усилился. Это обусловлено прежде всего расширением сферы практического применения экономико-математических моделей для решения задач организации, управления и планирования развития производства.

Широкое применение методов экономико-математического моделирования в экономических исследованиях стало возможным во многом

благодаря растущему использованию современных средств компьютерной техники, увеличению ее мощности. Создание специальных пакетов прикладных программ дало возможность значительно расширить сферу практического применения методов моделирования, существенно упростить процесс нахождения оптимальных решений.

Экономико-математическое моделирование как эффективный способ решения задач промышленного производства можно рассматривать не только как научную дисциплину, но и как искусство. Правомерность утверждения о научности подхода к нахождению оптимальных решений в менеджменте определяется тем, что при принятии решений наиболее эффективным образом используются математические модели и методы. Искусство моделирования состоит в том, что умение построения моделей и правильность нахождения оптимизационных решений всецело определяется интеллектуальными, творческими способностями их создателей.

В учебнике на примерах решения большого числа задач, показаны возможности построения экономико-математических моделей промышленного производства и получения оптимальных решений. Основное внимание при этом уделяется не только изучению и практическому использованию созданных ранее моделей, но и методам их построения. Все решения оптимизационных задач, полученные на компьютере, с использованием специальных пакетов прикладных программ, снабжены необходимыми комментариями и подробно проанализированы.

Учебник состоит из девяти разделов, которые включают восемнадцать глав. В каждой главе учебника, рассматривается одна из тем, охватывающая три ключевых вопроса. Для лучшего усвоения учебного материала и его активного использования в практической деятельности автором было введено низку рубрик. После каждого параграфа идет “Краткое повторение”, которое помогает систематизировать полученные знания. Каждая глава заканчивается контрольными вопросами и заданиями. Решив эти задания и ответив на поставленные вопросы можно установить, какие из тем, требуют более детального изучения. В конце каждой главы приведены определения основных понятий, которые раскрываются в тексте.

Словарь терминов по экономико-математическому моделированию и литература необходимые для изучения курса приведены в конце учебника.



Часть I

Введение в экономико-математическое моделирование

Тема 1. *Предмет и метод моделирования*

- § 1.1. Предмет и задачи курса
- § 1.2. Этапы моделирования
- § 1.3. Из истории моделирования

Тема 2. *Классификация моделей и типы задач*

- § 2.1. Классификация моделей
- § 2.2. Методы решения задач
- § 2.3. Типы производственных задач

Глава

1

ПРЕДМЕТ И МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ

В этой главе мы выясним, для чего необходимо изучать моделирование, что является объектом его исследования. Также узнаем, какие методы применяют при построении моделей, какие при этом возникают сложности. И в конце, кратко рассмотрим историю развития моделирования.

§ 1.1. Предмет и задачи курса

Для чего следует изучать моделирование

Развитие современного промышленного производства ставит целый ряд достаточно сложных задач связанных с необходимостью постоянного совершенствования его организации и управления. Увеличение масштабов производства, рост числа межпроизводственных связей, расширение ассортимента выпускаемой продукции делают применение методов экономико-математического моделирования одним из наиболее эффективных инструментариев экономических исследований. В настоящее время, все более очевидно, что полагаться лишь на опыт и здравый смысл при принятии ответственных экономических решений уже недостаточно. Необходимость применения экономико-математических методов, продиктована также тем, что в отличие от других исследователей экономисты лишены какой-либо возможности активного экспериментирования. Цена некомпетентности в принятии экономических решений является очень высокой. Последствия неудачного экспериментирования в дальнейшем дают о себе знать на протяжении достаточно продолжительного периода времени. Платой за допущенные просчеты становится замедление темпов роста

промышленного развития, падение объемов производства, уменьшение получаемой прибыли, безработица, нарастание социальной напряженности. Применение методов экономико-математического моделирования при разработке наиболее перспективных вариантов развития промышленного производства открывает широкие возможности для принятия научно обоснованных, всесторонне взвешенных, комплексных решений.

Что такое модель

Модель – достаточно распространенное общее понятие которое очень широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. После когда о моделях заговорили буквально все – астрономы, биологи, лингвисты, механики, физики, химики и экономисты, расхождения в трактовке этого понятия еще больше увеличились. Мы ограничимся только таким толкованием этого термина, которое нашло широкое использование в *экономико-математическом моделировании*.

Модель – мысленно создаваемый, абстрактный образ реальной действительности, который в ходе исследования замещает объект-оригинал, в целях более глубокого и всестороннего изучения отдельных аспектов проблемы.

Модель является *эффективным инструментом* научного исследования. Основная особенность моделирования состоит в том, что это метод *опосредованного* познания действительности с помощью создаваемых **модельных конструкций**. Модель при этом, выступает ни чем иным, как **абстрактной формой** отражения **идеализированной реальности**, дающей возможность исследователю концентрировать основное внимание на главном, опустив все ненужное, второстепенное.

Понятие модели вытекает из наличия некоторого сходства между двумя объектами. Один из которых рассматривается как оригинал,

а другой – как его модель. Соответствие между оригиналом и его моделью заключается в сходстве, а не в тождественности их функционирования. Это значит, что модель не должна всецело копировать оригинал, но и не может слишком отличаться от него. Модель является тем условным образом, абстрактно изображающим основные взаимосвязи и зависимости, которые существуют в реальной действительности. При построении моделей абстрагируются не только от несущественных черт, но и качества предметов и конкретного значения величин. Степень соответствия модели объекту-оригиналу при этом, может быть различной. Можно говорить о том, что одна модель больше соответствует оригиналу, чем другая, т. е. об **адекватности** модели оригиналу.

В отличие от **материальных моделей** (уменьшенных копий ракет, кораблей, автомобилей) **абстрактные модели** более универсальны. Если использование **материальных моделей** исследуемых объектов дает возможность получить такие данные, какие ни какая другая модель дать не может, то при изменении какого-либо одного параметра, необходима замена всей модели. **Абстрактные модели** лишены таких недостатков. Переход от исследования объектов одних физических размеров к другим не требует переделки всей модели. **Абстрактной моделью** называется система формализованных математических выражений, описывающих моделируемый объект или процесс. В **абстрактной**, или **математической**, модели все функциональные зависимости записываются в виде формул на математическом языке с помощью специальных знаков – символов.

Под **моделированием** понимается процесс построения, изучения, проверки и применения моделей. Он наиболее тесным образом связан с такими **гносеологическими** категориями, как **абстракция**, **аналогия**, **гипотеза** и др. **Моделирование** включает в себя построение абстракций, умозаключений по аналогии, выдвижение научных гипотез.

Предмет моделирования

Предметом изучения курса математического моделирования являются количественные характеристики работы промышленных предприятий, исследование межпроизводственных взаимосвязей и технологических зависимостей.

Применительно к промышленному производству методы экономико-математического моделирования могут быть использованы

в двух основных направлениях – совершенствования организационно-управленческой структуры и оптимизации технологических процессов. Опыт показал, что на этом уровне самые разнообразные организационные, управленческие и технологические проблемы можно подвести к решению экстремальных задач, позволяющих из многих возможных вариантов выбрать оптимальный. В сфере решения проблем производства, применение экономико-математических методов моделирования состоит в определении интенсивности и характера использования ресурсов (сырья, материалов, оборудования, живого труда, финансовых средств и пр.), обеспечивающих достижение наибольшей эффективности.

Метод моделирования

Основным методом данного курса является **абстракция**, построение абстрактных математических моделей. Модель является ни чем иным, как упрощением реальной действительности. Довольно ощутимое упрощение наступает тогда, когда несущественные особенности моделируемой ситуации отбрасываются и исходная сложная задача сводится к идеализированной задаче, поддающейся математическому анализу. Именно при таком подходе в классической прикладной математике возникают блоки без трения, невесомые нерастяжимые нити, невязкие жидкости и многие другие подобного рода понятия. В идеальном газе столкновение двух молекул рассматривается как упругое соударение шаров; при этом результат соударения мыслится всеми одинаково. Эти понятия, не существуют в реальности, они являются абстракциями, составляющей частью идеализации действительности. И тем не менее, их часто можно считать хорошим приближением реальных ситуаций моделируемых исследователем.

Методология экономико-математического моделирования представляет собой совокупность приемов и правил, формализации исследуемых экономических проблем, которые представляются и записываются в виде формул, векторов, матриц числовых коэффициентов, неравенств и уравнений (или в другой форме). Абстрактная математическая модель с ее идеальными объектами правильной формы, отношениями и операциями, определенным не противоречивым набором правил (определяющих аксиом),

§ 1.1. Предмет и задачи курса

является тем идеальным инструментом исследования, который дает возможность устанавливать общие отношения между полученными результатами.

Основная задача курса

Задачей курса является знакомство с новыми методологическими и методическими разработками в области экономико-математического моделирования промышленного производства, обучение правилам построения моделей, *интерпретации* результатов решения, приобретения практических навыков работы с пакетами прикладных программ на компьютере. Применение методов экономико-математического моделирования ставит своей целью решение ряда сложных экономических задач: распределения дефицитных ресурсов, размещения предприятий отрасли, совершенствования производственной структуры, оптимизации производственной программы, оптимизации технологического процесса, оптимизации запасов, раскроя материалов и оптимизации состава смеси. Эти задачи, занимают очень важное место в развитии современного промышленного производства, однако, далеко не исчерпывают всех проблем его организации и управления. Круг решаемых проблем совершенствования организации и управления промышленного производства несомненно значительно шире и не ограничивается только этими задачами.

Краткое повторение

- **Абстракция** – отвлеченное идеализированное понятие отражающее реальность в достаточно упрощенной форме.
- **Модель** – мысленно создаваемый, абстрактный образ реальной действительности, который в ходе исследования замещает объект–оригинал, в целях более глубокого и всестороннего изучения отдельных аспектов проблемы.

- ❑ **Абстрактная модель** – система формализованных математических выражений, описывающих моделируемый объект или процесс.
- ❑ **Моделирование** – процесс построения, изучения, проверки и применения моделей. Включает в себя построение абстракций, умозаключений по аналогии, выдвижение научных гипотез.
- ❑ **Адекватность** – соответствие *модели* моделируемому объекту или процессу.

§ 1.2. Этапы моделирования

Процесс построения модели

Построение экономико-математической модели процесс, который включает ряд этапов: разработку концептуальной модели; формализацию ее в математическом виде; выбор численного метода решения; проведение экспериментальных расчетов на компьютере; анализ полученных результатов; их проверку. Это означает, что за первым циклом может последовать второй, третий, и т.д. Совершенствованию модели нет пределов. Процесс математического моделирования непрерывно ведет к последовательно усложняющимся моделям.

В процессе моделирования используются как уже имеющиеся данные, так и результаты специально произведенных расчетов, которые получают на предварительной стадии построения модели.

К сожалению, решаемые с помощью моделей задачи слишком сложны, чтобы их можно было рассчитывать в ручную, в связи с чем приходится прибегать к средствам вычислительной техники. Компьютер следует рассматривать как полезный инструмент для проведения рутинных расчетов, которые в принципе являются простыми. Следует отметить, что использование компьютера ничего нового к модели не прибавляет (хотя это может умалить ее ценность,

§ 1.2. Этапы моделирования

если расчеты сделаны не верно), поэтому достоверность и ценность модели почти полностью определяется тем, насколько разумны положенные в ее основу предположения. Блок-схема процесса формализации модели в наиболее общем виде представлена на рис.1.1.

Процесс формализации модели

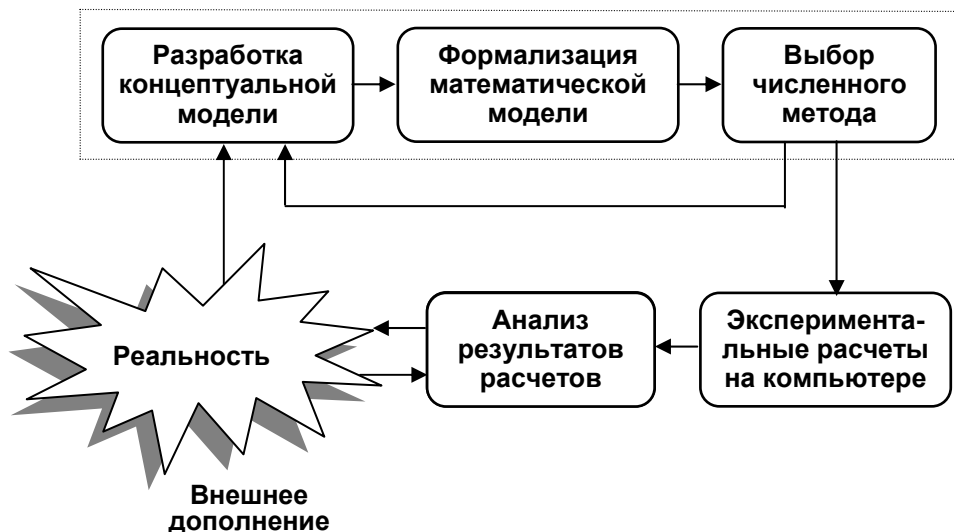


Рис. 1.1. Блок-схема цикла моделирования

Разработка концептуальной модели

На первоначальном этапе происходит сбор необходимых сведений и разработка *концептуальной модели*. Правильность формулировки модели не может быть всецело отнесена к числу объективных представлений.

Это предварительное, приближенное представление о изучаемом объекте или процессе, часто очень схематическое, которое фиксирует наиболее существенные параметры и связи между ними. На этом этапе, обычно ограничиваются рассмотрением не количественными, а качественными категориями. Формализуются основные цели, определяются возможные альтернативные варианты их решения,

устанавливаются общие требования и ограничения. При этом, обычно констатируется, что в рассматриваемом аспекте проблемы она в той или иной мере отвечает основным целям и задачам исследования.

Формализация математической модели

На *втором этапе* процесса моделирования, учитываются особенности постановки задачи, устанавливаются количественные соотношения, формализуются структурно-логические взаимосвязи и функциональные зависимости. Это, в свою очередь, предполагает достижение возможного конструктивного компромисса за счет введения в модель некоторых абстрактных смысловых структур и принятия необходимых допущений и упрощений. Приняв их и формализовав модель, в дальнейшем уже невозможно оспаривать правильность сделанных ранее предположений. Единственное, что можно сделать, так это оценить насколько правильно были сделаны допущения. Цикличность процедуры экономико-математического моделирования и предназначена для испытания корректности принимаемых допущений. Если созданная модель соответствует некоторому общему классу математических моделей (например, моделям линейного программирования), то для получения решения удобно в дальнейшем воспользоваться уже известными математическими методами. Если математические соотношения, используемые в модели, слишком сложны и не позволяют получить аналитического решения задачи, более подходящей для исследователя может оказаться имитационная модель. В некоторых случаях возникает необходимость совместного использования математической, имитационной и эвристической моделей. Проверка правильности построения модели осуществляется на всех этапах моделирования, начиная с разработки модели и заканчивая проверкой полученных результатов. Это не только предполагает необходимость проверки методологической корректности моделей, контроль их логической непротиворечивости, соблюдения требуемого соответствия размерностей, но также установления правильности выбора используемого численного метода, определения точности выполненных расчетов. В процессе **верификации** модели проверяется ее структурно-логическую непротиворечивость, уточняют отдельные функциональные

зависимости и корректируется размерность отдельных задаваемых в модели числовых величин. Количество включенных в модель переменных и ограничений должно быть достаточным для решения

Верификация – проверка истинности, правильности структуры (логики) модели, адекватности.

данной задачи, но не избыточным. Одним из основных моментов *верификации* модели становится определение ее оптимальной сложности. Иногда имеет смысл вначале построить небольшую модель, поскольку она может подсказать, как следует провести экспериментальные расчеты, чтобы получить требуемые результаты.

Если модель используется для принятия решения относительно возможных объемов потребления ресурсов и выпуска продукции в регионе, то она не обязана быть слишком точной. При этом правильность полученных решений будет в необходимой мере соответствовать экономическим условиям производства в том или ином регионе. Если же модель применяется к конкретному предприятию, потребителю отдельных видов ресурсов и производителю определенного ассортимента продукции, то она должна быть более точной.

**Выбор
численного
метода**

Необходимым условием обеспечения требуемой степени точности при проведении экспериментальных расчетов на третьем этапе является правильность выбора численного метода в соответствии с классом решаемых задач, а также предметной области, для которой этот алгоритм наиболее применим. При использовании математической модели решение получают с помощью апробированных оптимизационных методов; при этом полагают, что модель приводит к оптимальному решению задачи. Нередко новые математические методы, используемые в экономико-моделировании для решения задач определенного класса, могут быть применены к другим задачам, часто значительно отличающихся от задач, которые послужили основой для их создания. В случае применения **имитационных** или **эвристических моделей** понятие оптимальности становится менее определенным и получаемое

решение соответствует лишь приближенным оценкам критериев оптимальности.

Высокий уровень выдвигаемых требований к *робастности* используемого алгоритма численного метода, его высокая надежность расчеты неточны. Это обусловлено тем, что для целого ряда решаемых задач созданы надежные алгоритмы, которые всегда работают и ситуации при которых все же возможны неудачи маловероятны и их можно игнорировать. Однако многие математические задачи алгоритмически неразрешимы. Это означает, что для любого алгоритма всегда найдется задача из той же предметной области, для которой этот алгоритм абсолютно непригоден. Примером такого рода задач, может служить вычисление с помощью методов линейного программирования интегралов, решение нелинейных и дифференциальных уравнений. Поэтому надежность определяет вероятность неудачи алгоритма, которая состоит или в отсутствии результата (что не так плохо), или в получении ошибочного результата (что очень плохо). *Робастность* тесно соотносится с надежностью, однако дополнительно включает в себе знание того, где и по какой причине алгоритм потерпел неудачу. Можно сказать, что алгоритм численного метода является рабастым, если все его неудачи не являются неожиданными и могут быть идентифицированы. Сложность процесса моделирования затрудняет не только построение экономико-математических моделей, но и проверку их адекватности, истинности полученных результатов.

Выполнение экспериментальных расчетов

На *четвертом этапе* моделирования – выполнения экспериментальных расчетов, производится окончательная корректировка параметров модели, вносятся необходимые изменения и дополнения. Главной формой исследования на этом этапе, является проведение “*модельных*” экспериментов, когда преднамеренно изменяют условия функционирования модели, собирают и систематизируют данные о ее “поведении”. Важное место при этом отводится *валидации* – проверке правильности результатов получаемых в процессе *компьютерной имитации*. Проверка результатов расчетов производится тогда, когда экспериментатор убедился на предыдущей стадии (*верификации*) в правильности построения модели.

Точность полученных результатов оценивается путем их сравнения с реальными данными. Это требует не только экспериментального подтверждения их соответствия, но также и расширения нормативной базы проводимых исследований. Варьирование параметров

Валидация – проверка правильности результатов экспериментальных расчетов получаемых в процессе компьютерной имитации.

модели в широких пределах, при проведении экспериментальных расчетов на компьютере, дает возможность исследовать диапазон устойчивости получаемых оптимизационных решений. При этом, весьма важно исследовать возможные изменения оптимума в зависимости от соответствующих параметров модели, в некотором интервале их количественных значений.

**Анализ
полученных
результатов**

На пятом этапе – анализируются результаты решений, оценивается правильность и точность выполнения расчетов, рассматриваются дополнительно полученные данные. При этом знания об исследуемом объекте или процессе расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Если предыдущие этапы моделирования были выполнены очень тщательно, то полученные результаты будут легко интерпретированы и правильность полученных результатов, не будет вызывать никаких сомнений. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные недостаточными знаниями об объекте и ошибки в построении модели, можно исправить в последующих циклах. В методологии моделирования, таким образом, заложены большие возможности саморазвития. Компьютеры используемые сейчас для решения системы уравнений, могут быть использованы и для проверки правильности полученных решений путем сравнения результатов экспериментальных вычислений с имеющимися данными и внесения необходимых корректив в матрицу оптимизационной модели.

Краткое повторение

- ❑ **Валидация** – проверка соответствия результатов, полученных в процессе компьютерной имитации, реальным данным.
- ❑ **Верификация** – проверка истинности, правильности структуры (логики) модели, ее адекватности.
- ❑ **Концептуальная модель** – принципиальная основа построения экономико-математической модели. Это предварительное, приближенное представление о рассматриваемом объекте или процессе.
- ❑ **Рабастость алгоритма** – высокая надежность полностью исключающая ситуацию, при которой становится невозможным получение искомых результатов или выполненные расчеты неточны.

§ 1.3. Из истории моделирования

Начало развития моделирования

Экономико-математическое моделирование получило свое развитие во многом благодаря работам известных отечественных и зарубежных ученых. Заметным событием в истории моделирования стала разработка первого в мире баланса народного хозяйства СССР за 1923/24 год. Межотраслевой баланс народного хозяйства был построен Центральным статистическим управлением СССР под руководством П.И. Попова. Этот баланс народного хозяйства включал наряду со сводными показателями воспроизводства (в материально-вещественном и стоимостном разрезах) также и таблицы межотраслевых потоков предметов труда и средств производства. Работа ЦСУ СССР на много лет

опередела зарубежные статистические исследования как по сводным балансовым таблицам (национальным счетам), так и по межотраслевым балансам.

Первый межотраслевой баланс США был построен в 1936 г. В.В. Леонтьевым проживавшим до конца 20-х годов в Советском Союзе и достаточно хорошо знакомым с работами ЦСУ СССР. На западе его работы приобрели очень широкое признание. Известны его заслуги по популяризации идей межотраслевого баланса и организации работ по разработке межотраслевых балансов во многих странах мира. Предложенный В.В. Леонтьевым метод построения модели межотраслевого баланса и распределения продукции США известен в литературе под названием метода анализа экономики “**затраты-выпуск**”. В.В. Леонтьев использовал также идею “*технологических коэффициентов*”, независимых от объема выпуска продукции.

Первая постановка задачи линейного программирования в виде предложения, по составлению оптимального плана перевозок, позволяющего минимизировать суммарный километраж, дана в работе советского экономиста А.Н. Толстого в 1930 г.

В 1931 г. венгерский математик Б. Эгервари рассмотрел математическую постановку решения задачи линейного программирования имеющую название “*проблема выбора*”, метод решения получил название *венгерского метода*.

В 1938–1939 годах ленинградский математик Л.В. Канторович в ходе своей работы, занимаясь исследованием чисто практической задачи – выбора наилучшей производственной программы загрузки группы станков. В результате анализа ряда проблем организации и планирования производства был сформулирован новый класс оптимизационных задач с ограничениями в виде неравенств и предложен общий метод их решения (метод разрешающих множителей). Он же совместно с М.К. Гавуриным в 1949 г. разработал метод потенциалов, который применяется для решения транспортных задач. В последующих работах Л.В. Канторовича и других математиков и экономистов получили развитие как математическая теория линейного и нелинейного программирования, так и приложения ее методов в исследовании различных экономических проблем. Это открыло новый этап в развитии экономико-математических методов моделирования. Однако долгое время эти методы почти не разрабатывались и в практику не внедрялись.

**Новый
этап
моделирования**

Вторая мировая война потребовала значительного напряжения усилий по консолидации знаний для успешного решения возникших задач. Именно к этому периоду развития моделирования следует отнести появление термина “исследование операций” используемого при решении задач военного характера. В 1941 г. Г. Хичкок осуществляет постановку транспортной задачи. Тем не менее, наиболее бурный расцвет и развитие новой науки относится уже к послевоенному периоду. В этот период получает логическую законченность и математическую стройность линейное программирование. Один из основных методов решения задач линейного программирования – *симплексный метод* – был предложен в 1949 г. Дж. Данцигом. Название “линейное программирование” впервые появилось в 1951 г. в работах Дж. Данцига и Т. Купманса. Слово “программирование” означает, что набор переменных, подлежащих нахождению, обычно определяет программу (план) работы конкретного экономического объекта. В начале 1952 г. задача линейного программирования была впервые решена с помощью вычислительной машины.

Дальнейшее развитие методы линейного и нелинейного программирования получили в работах Л. Форда, Д. Фалкерсона, Г. Куна, К. Лемке, С. Гасса, А. Таккера, А. Чарнеса и других ученых. Возникает ряд новых ветвей операционного программирования: стохастического, параметрического, целочисленного, блочного и динамического. Появляются новые ветви и направления теории исследования операций и систем: теория статистических решений, теория прогноза, теория поиска, теория расписаний, сетевой анализ и др. Наряду с этим разрабатываются теоретические и методологические основы исследования операций и систем, общие для всех многочисленных ветвей и направлений. Это совершенствование и рост новой отрасли знаний сопровождался одновременным расширением сферы приложений ее методов в самых различных областях общественной практики. Если первоначально областями приложения линейного программирования преимущественно служили военное дело и некоторые специальные отрасли техники, то теперь объектами моделирования являются уже производство, строительство, транспорт, сельское хозяйство и т.д.

На этом этапе, было построено большое количество экономико-

математических моделей, на основе которых проделаны расчеты по составлению реальных оптимизационных планов (оптимальные планы перевозок, эксплуатации подвижного состава транспорта, использования топлива, загрузки оборудования предприятий, оптимального размещения предприятий и отраслей промышленности, инвестиций в производство и т.д.), что принесло большие выгоды народному хозяйству.

Одновременно с развитием линейного программирования большое внимание уделялось задачам нелинейного программирования, в которых либо целевая функция, либо ограничения, либо то и другое нелинейны. В 1951 г. была опубликована работа Г. Куна и А. Таккера, в которой приведены необходимые и достаточные условия оптимальности для решения нелинейных задач. Эта работа послужила основой для последующих исследований в области нелинейного программирования. В 1954 г. А. Чарнес и К. Лемке рассмотрели приближенный метод решения задачи с сепарабельными выпуклыми функциями цели и линейными ограничениями. Начиная с 1955 г. опубликовано много работ, посвященных квадратическому программированию. К этим работам, в первую очередь следует отнести работы Е. Била, М. Франка, Х. Марковича, Р. Нельсона.

В некоторых задачах линейного и нелинейного программирования экономический процесс протекает на протяжении ряда периодов (этапов). При решении таких задач необходимо учитывать поэтапное развитие процесса. Примером этого, могут служить задачи распределения лимитированных ресурсов между предприятиями по годам планируемого периода. Динамическое программирование получило широкое развитие в пятидесятые годы. Большой вклад в решение этих задач внес американский математик Р. Белман. Дальнейшее развитие динамическое программирование получило в трудах зарубежных ученых Д. Гавера, К. Дермана, С. Дрейфуса, Д. Робертса, Р. Ховарда и др. В настоящее время оно в основном развивается в направлении приложений к различного ряда многоэтапным процессам.

В начале 60-х годов энтузиасты надеялись буквально за считанные годы математизировать весь процесс планирования и управления народным хозяйством. В действительности все оказалось намного сложнее. Использование экономико-математического моделирования в практике планирования и управления требовало

больших организационных усилий и часто не приводило к ожидаемым результатам. В этот период стали все более глубоко осознаваться реальные возможности моделирования в условиях реализации этих возможностей.

Современный этап моделирования

Современный этап развития экономико-математических методов начался с середины 70-х годов. В эти годы осуществился переход от использования математических моделей для решения отдельных экономических задач, к их системному применению в автоматизированных системах планирования и управления. Этот переход требовал решения двух основных проблем: объединения отдельных моделей экономических процессов и явлений в системы (комплексы) моделей; непосредственного включения моделей в процесс планирования и управления, создания новых планово-управленческих технологий, базирующихся на системном использовании математических методов и средств вычислительной техники. Важным шагом в решении этих проблем стала разработка автоматизированной системы плановых расчетов (АСПР) в Госплане СССР.

Значительные успехи были достигнуты в области моделирования отраслевого производства. Это во многом стало возможным вследствие перехода от решения простейших задач транспортировки продукции к решению задач размещения производства однопродуктовых отраслей, а затем – к многопродуктовым моделям, в которых комплексно рассматривалась оптимизация развития, размещения, специализации, кооперирования и транспортировки. Дальнейшим шагом в развитии экономико-математического моделирования стало создание моделей многоуровневых отраслевых систем и многоотраслевых комплексов.

В это время получило развитие моделирование территориальных систем. Были разработаны межрегиональные межотраслевые модели. Разработана группа моделей внутрирегионального развития: модели территориально-производственных комплексов и их сочетаний, промышленных узлов, систем расселения и т.д. Такие модели использовались для предпланового научного обоснования, при построении генеральных схем размещения производительных сил и схем районных планировок.

Значительные успехи были достигнуты в разработке моделей планирования и управления предприятиями. Это, прежде всего, касается моделей оптимального использования производственных мощностей (оборудования), оперативного, календарного планирования, выбора технологических способов, оптимизации состава смесей и рационального раскроя, управления запасами, технико-экономической подготовки производства и т.д. Эти модели впоследствии составили основу автоматизированных систем управления предприятиями (АСУП).

Наряду с расширением сферы применения математических методов в экономике и планировании совершенствовался процесс построения моделей, что нашло свое выражение в переходе от статических к динамическим моделям. Наиболее отчетливо это проявилось в переходе от жестко детермированных моделей к учитывающим стохастичу и неопределенность экономических процессов, применении методов нелинейного и целочисленного программирования, методов статистического моделирования, создании новых алгоритмов, позволяющих решать задачи большой размерности, и т. д.

Интерес к экономико-математическому моделированию во всем мире неизменно возрастает. Применение методов моделирования стало в настоящее время неотъемлемой составляющей большинства экономических исследований. В 1975 г. Л.В. Канторовичу совместно с американским ученым Т. Купмансом за исследования по оптимальному использованию ресурсов была присуждена Нобелевская премия.

Весной 1979 г. советским математиком Л.Г. Хачияном был предложен метод “*эллипсоидов*”, как метод решения задач линейного программирования. Этот метод, совершенно отличается от большинства известных ранее методов, так как полностью игнорирует комбинаторную природу реализуемого алгоритма. В отличие от симплекс-метода, он гарантирует получение оптимального решения за определенное число шагов. Метод Л.Г. Хачияна, если его сформулировать в математических терминах, использует уравнения для порождения воображаемых эллипсоидов, содержащих ответ внутри себя, тогда как в симплекс-методе ответ представляется пересечением граней многогранников. Чем меньше становятся эллипсоиды, тем более точный ответ имеется в вашем распоряжении.

Реальная оценка современного состояния и возможностей развития экономико-математического моделирования – необходимое условие для успешного решения задач совершенствования организации и управления промышленного производства.

Краткое повторение

- ❑ **1924 г.** – в ЦСУ СССР под руководством П.И. Попова разработан первый в мире межотраслевой баланс народного хозяйства.
- ❑ **1931 г.** – венгерский математик Б. Эгервари рассмотрел математическую постановку решения задачи линейного программирования имеющую название “*проблема выбора*”, метод решения получил название *венгерского метода*.
- ❑ **1939 г.** – ленинградский математик Л.В. Канторович осуществил первую постановку оптимизационной задачи. Предложенный им метод получил название “*метод разрешающих множителей*”.
- ❑ **1949 г.** – Л.В. Канторович и М.К. Гавурин разработали метод потенциалов применяемый для решения транспортных задач.
- ❑ **1949 г.** – американский математик Дж. Данциг предложил основной метод решения задач линейного программирования, получившего название “*симплексного метода*”.
- ❑ **1952 г.** – задача линейного программирования впервые решена с помощью электронной вычислительной машины.

- 1979 г. – советский математик Л.Г. Хачиян предложил метод “эллипсоидов” для решения задач линейного программирования.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

абстрактная модель
абстрактная форма
абстракция
адекватность
аналогия
валидация
верификация
внешнее дополнение
гипотеза
затраты-выпуск
имитационная модель
интерпретация
исследования операций

конструктивный компромисс
концептуальная модель
математическая модель
метод разрешающих множителей
метод эллипсоидов
моделирование
модель
модельная конструкция
модельный эксперимент
рабастость алгоритма
симплексный метод
эвристическая модель

***Контрольные вопросы
и задания***



1. Для чего следует изучать моделирование?
2. Что такое модель?
3. Что является предметом моделирования?
4. Что представляет собой метод моделирования?
5. В чем состоит основная задача курса?
6. Что такое цикличность процесса моделирования?
7. Что представляет собой концептуальная модель?
8. В чем состоит сложность построения модели?
9. Что предполагает выбор численного метода?
10. В чем состоит цель экспериментальных расчетов?
11. Что предполагает анализ полученных результатов?
12. Что послужило началом в истории развития
экономико-математического моделирования?
13. Начало современного этапа моделирования?
14. Особенности современного этапа моделирования?

Глава

2

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ И ТИПЫ ЗАДАЧ

В этой главе будут рассмотрены основные виды моделей и признаки их классификации. Представлены методы решения оптимизационных и неоптимизационных задач. Рассмотрены типы решаемых производственных задач, которые наиболее часто используются в практике моделирования.

§ 2.1. Классификация моделей

Признаки классификации моделей

Развитие экономико-математического моделирования привело к созданию большого числа математических моделей, для решения самых различных экономических, организационных и технологических задач промышленного производства. Классификация моделей, как и любая другая классификация (явлений, событий, объектов и т.д.), может быть произведена по одному из признаков (табл. 2.1). При любом исследовании в качестве основного признака выбирается наиболее существенный для этого исследования.

Классифицируя экономико-математические модели, следует помнить о различии подходов к построению моделей и методов их решения. Применение того или иного подхода к построению модели неизменно определяется сущностью постановки задачи, а решение задачи – совокупностью математических методов, используемых для получения численного решения. В этом их различие. Взаимосвязь между ними обусловлена тем, что решение экономической задачи или проведение исследования с помощью экономико-математических методов всегда начинается с построения математической модели. Для практической реализации экономико-

математической модели задачи, адекватно описывающей ту или иную экономическую проблему и получения численного результата, используется один из применяемых математических методов.

*Таблица 2.1***Классификация экономико-математических моделей**

Признаки классификации	Виды моделей
<i>В соответствии с целевым назначением</i>	<i>Теоретико-аналитические</i>
	<i>Прикладные</i>
<i>По способу отражения внутренних и внешних сторон</i>	<i>Функциональные</i>
	<i>Структурные</i>
<i>По описанию и объяснению действительности</i>	<i>Дескриптивные</i>
	<i>Прескриптивные</i>
<i>По способу взаимодействия с внешней средой</i>	<i>Открытые</i>
	<i>Закрытые</i>
<i>В соответствии с полнотой охвата</i>	<i>Макромодель</i>
	<i>Микромодель</i>
<i>По отражению причинно-следственных связей</i>	<i>Детерминированные</i>
	<i>Стохастические</i>
<i>По отражению временного фактора</i>	<i>Статические</i>
	<i>Динамические</i>
<i>По характеру взаимосвязей Переменных</i>	<i>Линейные</i>
	<i>Нелинейные</i>
<i>По учету территориального фактора</i>	<i>Пространственные</i>
	<i>Точечные</i>

Классификация экономико-математических моделей позволяет, с одной стороны, их упорядочить, систематизировать, а с другой, – более детально разобраться в самой сущности моделирования промышленного производства.

Теоретико-аналитические и прикладные модели

По целевому назначению модели делятся на *теоретико-аналитические*, используемые в исследовании общих свойств и закономерностей экономических процессов, и *прикладные*, применяемые в решении конкретных экономических задач (модели экономического анализа, прогнозирования, управления). Теоретико-аналитические модели, которые строятся в виде уравнений, характеризуют функциональные зависимости между величиной затрат и выпуска продукции.

Экономико-математические модели могут предназначаться для исследования различных сторон развития промышленного производства (в частности, межотраслевых, отраслевых и производственных структур). При классификации моделей по исследуемым экономическим процессам и содержательной проблематике можно выделить модели функционирования народного хозяйства в целом, отдельных его отраслей, регионов, производственных объединений и предприятий.

Функциональные и структурные модели

В соответствии с общепринятой классификацией экономико-математических моделей они подразделяются на *функциональные* и *структурные*. Кроме того, они могут также включать некоторые промежуточные (*структурно-функциональные*) формы. В исследованиях на макроэкономическом уровне чаще всего применяются *структурные* (и *структурно-функциональные*) модели, поскольку для планирования и управления народного хозяйства большое значение имеет изучение взаимосвязей отраслей производства. Структурные модели отражают структуру исследуемой системы, ее внутренние параметры, характеристики внешних возмущений. Типичными *структурными* моделями являются модели межотраслевых связей.

Функциональные модели широко применяются в экономическом регулировании. Примером могут служить производственные функции. Функциональные модели описывают поведение системы безотносительно к ее внутренней структуре. При их изучении возникают гипотезы о причинах тех или иных реакций объекта на воздействие внешней среды и, таким образом, открывается путь к анализу его структуры и формированию структурных моделей.

Дескриптивные и прескриптивные модели

Некоторые математические модели являются *дескриптивными*, тогда как другие – *прескриптивными*. *Дескриптивные модели* служат для описания и объяснения наблюдаемых фактов или прогноза поведения объекта, в отличие от *прескриптивных (нормативных) моделей*, предназначенных для нахождения желательного (например, оптимального) состояния объекта. Построение *прескриптивных моделей* дает возможность выдвинуть ряд рекомендаций относительно того, как желательно было бы действовать в идеализированной ситуации. *Дескриптивная модель* описывает, как в действительности все происходило.

Открытые и закрытые модели

В зависимости от реализуемых модельных представлений относительно взаимодействия модели с внешней средой они могут быть *открытые* и *закрытые*. Открытой является модель, в которой учитывается взаимодействие моделируемого объекта (процесса) с внешней средой. В закрытой модели, такие взаимосвязи не принимаются во внимание. Полностью открытых моделей не существует. Модель должна содержать хотя бы одну внутреннюю (*эндогенную*) переменную.

Эндогенные переменные – величины изменение которых происходит внутри модели. Числовые значения этих величин являются выходными параметрами.

Целиком закрытые модели, которые не включают внешних (*экзогенных*) переменных, встречаются крайне редко. Создание такого рода моделей, предполагает полное абстрагирование от возможного воздействия внешней среды, что связано с серьезным огрублением реальности. *Экзогенные* – входные параметры, которые рассчитываются вне модели и вводятся из вне.

§ 2.1. Классификация моделей

Для экономико-математических моделей деление переменных на *эндогенные* и *экзогенные* в значительной степени условно и

Экзогенные переменные – величины внешние по отношению к формализуемой модели. Числовые значения этих величин являются входными параметрами.

определяется характером решаемых задач. В большинстве своем экономико-математические модели являются чем то средним, и занимают промежуточное положение, различаясь по степени открытости (закрытости).

Макро- и микромодели

По степени полноты охвата экономико-математические модели делятся на *макро-* и *микромодели*. Макроэкономические модели представляют собой математическую формализацию экономики народного хозяйства как единого целого. Основное назначение *макромоделей* заключается в анализе структуры и динамики народного хозяйства; прогнозировании тенденций его развития; определении эффективности государственного экономического регулирования; выборе наиболее эффективных вариантов развития экономики страны.

При *макроподходе* моделируемый объект (будь это народное хозяйство, отрасль, предприятие или отдельный участок) рассматривается, так сказать с наружи, как единое целое. Это означает, что внутренние связи, внутреннее устройство объекта игнорируется, а изучаются только *входные* и *выходные* связи, их взаимная зависимость. Четкого разграничения макро- и микромоделей пока нет. При этом, к первым относятся наиболее обобщенные *глобальные модели*. Что же касается моделей, в которых объектом исследования выступают отрасли народного хозяйства, корпорации, предприятия, то в зависимости от целей исследования их нередко относят как к *макро*, так и *микромоделям*.

Макроэкономические модели оперируют агрегированными,

как правило стоимостными показателями (например, национальный доход, валовые капиталовложения и др.).

Микроэкономические модели представляют собой модели локальных экономических образований или частных экономических

Макромодель – модель, отражающая функционирование исследуемого объекта как единого целого.

процессов – планирования и управления отдельным предприятием или объединений. Ими являются модели рационального использования сырья, замены оборудования, управления запасами, обслуживания

Микромодель – модель, отражающая функционирование и структуру отдельных элементов исследуемого объекта.

и т. д. В отличие от макромоделей микромодели характеризуются детализированными технико-экономическими показателями, значительным числом и важной ролью экзогенных переменных.

Детерминированные и стохастические модели

По характеру отображения причинно-следственных связей модели могут подразделяться на **детерминированные** и **стохастические**. В **детерминированной модели** вероятностные элементы отсутствуют, количество ее выходов однозначно определено множеством входов, а сама модель может быть представлена как некоторая функция неслучайных переменных. Эти модели, целиком относятся только к абстрактным математическим модельным

§ 2.1. Классификация моделей

построениям, так как в реальной действительности всегда находится место для различного рода случайности. Детерминированные модели являются частным случаем *стохастических моделей*, в которых вероятность получения каждого из возможных результатов 0 или 1.

Детерминированная модель – аналитическое представление закономерности, операции и т. п., при которых для данной совокупности выходных значений на выходе модели может быть получен единственный результат.

Выбор *детерминированной* или *стохастической* модели зависит от того, какая роль в построении модели отводится случайным факторам. Вероятностные модели характеризуются

Стохастическая модель – модель, в которой параметры, условия функционирования и характеристики состояния моделируемого объекта представлены случайными величинами.

тем, что либо в отдельности, либо одновременно параметры, условия функционирования и характеристики состояния моделируемого объекта являются случайными величинами и связаны между собой случайными зависимостями. Характер этих состояний в модели определяется не однозначно, а через законы распределения их вероятностей. При этом реалистичнее, чем при *детерминированном* подходе, отражаются моделируемые экономические процессы, которые имеют вероятностный (*стохастический*) характер.

Статические и динамические модели

По способам учета фактора времени экономико-математические модели делятся на *статические* и *динамические*. В *статических моделях* все зависимости относятся к одному

моменту или периоду времени (например, году). *Динамические модели* характеризуют изменения экономического процесса во времени. По длительности рассматриваемого периода времени различают модели краткосрочного (до года), среднесрочного (до 5 лет), долгосрочного (10–15 лет и более) прогнозирования и планирования. Само время в экономико-математических моделях может изменяться либо непрерывно, либо дискретно (например, с шагом в один год). Примером *статических моделей* могут служить линейные модели распределения ресурсов, *динамических моделей* – модели развития производства.

Линейные и нелинейные модели

Линейной является модель, отображающая такое состояние или функционирование моделируемой системы, когда взаимозависимости в ней принимаются линейными. Соответственно, она может формулироваться в виде одного *линейного уравнения* или системы линейных уравнений. Причем в ряде случаев нелинейность взаимозависимостей может приводиться к линейной форме путем математических преобразований переменных. В отличие от этого, *нелинейная модель*, отображает состояние системы или функционирование системы, таким образом, что все или некоторые взаимосвязи в ней принимаются нелинейными, т. е. не удовлетворяющими условия линейности.

Пространственные и точечные модели

В зависимости от того, учитывает модель пространственные (территориальные) факторы и условия или не учитывает, различают модели *пространственные* и *точечные*. Таким образом, общая классификация экономико-математических моделей включает девять основных признаков. С развитием экономико-математического моделирования проблема классификации моделей все более усложняется. Наряду с появлением новых типов моделей (особенно смешанных типов) и новых признаков их классификации осуществляется процесс интеграции моделей разных типов в более сложные модельные конструкции.

Краткое повторение

- **Функциональная модель** – модель, описывающая поведение моделируемого объекта безотносительно к ее внутренней структуре (в отличие от **структурной модели** отражающей взаимосвязи и соотношения отдельных частей).
- **Открытая модель** – модель, в которой учитывается взаимодействие моделируемого объекта с окружающей средой (в отличие от **закрытой модели**, где такие связи во внимание не берутся).
- **Макромодель** – экономико-математическая модель, отражающая функционирование народного хозяйства как единого целого (в отличие от **микромодели**, рассматривающей его изнутри).
- **Динамическая модель** – модель, описывающая экономику в развитии (в отличие от **статической модели**, характеризующей ее состояние в определенный момент времени).

§ 2.2. Методы решения задач

Методы линейного программирования

Большое значение для корректного решения задач экономико-математического моделирования имеет правильность выбора численного метода. Все задачи экономико-математического моделирования в зависимости от наличия целевой функции можно условно разделить на две большие группы: *оптимизационные* и *неоптимизационные* (рис. 2.1).



Рис. 2.1. Классификация методов решения задач

К числу оптимизационных относятся задачи для решения которых, используются методы **линейного программирования**. По способу достижения оптимального плана методы **линейного программирования**, в свою очередь, делятся на методы последовательного улучшения плана и методы приближения условно-оптимального плана.

При использовании методов последовательного улучшения плана процесс достижения оптимального решения состоит из ряда повторяющихся этапов (итераций), на каждом из которых строится допустимое базисное решение. В случае не оптимальности полученного решения строится новое допустимое базисное решение, лучше предыдущего. К этой группе можно отнести метод потенциалов, распределительный метод для решения транспортных задач и метод разложения для решения задач большой размерности.

Методы приближения условно-оптимальными планами также являются итерационными, но основаны они на иных принципах. Основное отличие от предыдущей группы методов состоит в том, что сначала строится план, соответствующий критерию оптимальности, но не являющийся допустимым. Затем постепенно этот план вводится в допустимые границы. К этой группе следует отнести метод разрешающих множителей, симплекс-метод, а также метод решения транспортной задачи, венгерский метод и др.

Методы дискретного программирования

К задачам **дискретного программирования** относятся задачи, переменные и параметры которых являются дискретными величинами. Среди численных методов их решения выделяются три группы методов, отличающихся по своим подходам к решению проблемы: отсечения, комбинирования и приближения. Идея метода отсечения заключается в следующем. Задача в начале решается без учета целочисленности. Если в результате ее решения получен не целочисленный план, то к системе ограничений добавляется новое линейное ограничение, которое, как бы отсекая полученный оптимальный, но не целочисленный план, заведомо удовлетворяет любому целочисленному плану. В случае необходимости добавляется еще одно ограничение и т. д.

Следующей большой группой методов дискретного программирования являются комбинаторные методы, которые связаны с перебором

возможных вариантов решения задачи. Главная идея комбинаторного метода заключается в замене полного перебора планов частичным. Комбинаторные методы характеризуются определенным способом перебора, позволяющим исключить заведомо неоптимальные варианты плана без предварительного их рассмотрения. Центральное место среди комбинаторных методов занимают методы, объединенные под названием “метод ветвей и границ”.

Приближенные методы дискретного программирования можно разбить на две группы. Первая из них связана с использованием идеи случайного поиска: отправляясь от некоторой допустимой точки, найденной, каким-либо способом, делают шаг в случайном направлении, при этом следят, что бы не выйти из области определения задачи. В зависимости от того, лучше или хуже стало значение целевой функции в результате такого шага, возвращаются в исходную точку или делают новый случайный шаг.

Известен подход к решению дискретных задач, основанный на сочетании случайного поиска с локальной оптимизацией. Идея этого метода состоит в том, что производится случайный выбор некоторого плана, а затем оптимизация решения в его окрестности. Процесс повторяется многократно, и из множества локальных оптимумов выбирается наилучший с точки зрения целевой функции.

Приближенные методы другой группы являются детерминированными. Они основаны на разработке эвристических приемов, использующих специфику конкретной задачи.

Методы параметрического программирования

Методы параметрического программирования — это методы решения оптимизационных задач, коэффициенты целевых функций которых или числовые характеристики ограничений, или те и другие, не постоянные величины, а функции зависящие от ряда параметров. Из числа задач параметрического программирования можно выделить задачи, в которых коэффициенты линейных форм зависят от одного параметра; задачи, в которых составляющие вектора ограничений линейно зависят от одного параметра; задачи, являющиеся обобщением первых двух групп; задачи, в которых параметр содержится во всех элементах расширенной матрицы условий, причем зависимость от параметра может определяться любыми аналитическими функция-

ми. Методы решения задач параметрического программирования для первой группы аналогичны методам последовательного улучшения плана с особым правилом выбора вектора, подлежащего введению в базис, и специальными признаками окончания процесса решения.

Для второй группы задач вычислительный процесс параметрического программирования представляет собой процесс решения задачи методом приближения условно-оптимальными планами с особым правилом выбора вектора, исключаемого из базиса, и специальными признаками окончания решения задачи.

Анализ общей задачи линейного параметрического программирования сводится к серии последовательно проводимых шагов с помощью методов последовательного улучшения плана и приближения условно-оптимальными планами.

Методы динамического программирования

Основной особенностью метода является деление планируемой операции на ряд последовательных шагов или этапов. Процесс решения при этом, становится многошаговым, причем каждый раз целевая функция оптимизируется только на одном шаге.

К численным методам, помогающим реализовать модели динамического программирования, следует также отнести метод приближения в пространстве функций, метод приближения в пространстве стратегий, метод полиномиальной аппроксимации, дифференциальной аппроксимации и др.

Математическая оптимизационная задача строится в динамическом программировании с помощью таких соотношений, которые последовательно связаны между собой: например, полученный результат для одного года вводится в уравнение для следующего (или, наоборот, для предыдущего) и т.д.

Методы динамического программирования применяются не только для задач, связанных с течением времени. Многошаговым может быть и процесс решения вполне “статической” задачи. Таковы, например, некоторые задачи распределения ресурсов.

Общим для методов динамического программирования является то, что для решения строится такая вычислительная схема, когда вместо одной задачи со многими переменными строится много задач с

меньшим числом (обычно даже одной) переменной в каждой. Это позволяет в целом значительно сократить объем вычислений. Однако такое преимущество достигается лишь при двух условиях: когда критерий оптимальности аддитивен, т. е. общее оптимальное решение является суммой оптимальных решений каждого шага, и когда будущие результаты не зависят от предыстории того состояния системы, при котором принимается решение.

Матричный метод

В числе основных методов решения не оптимизационных задач *матричный метод* неизменно занимает одно из важнейших мест. Применение матричного метода ставит своей целью решение задач межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве, производства и распределения продукции регионов, сбалансированности производственных планов предприятий. Название “матричный” этот метод получили из-за того, что основу его составляет математический аппарат матричной алгебры. Используется главным образом в тех случаях, когда объектом исследования являются балансовые соотношения – при изучении затрат и результатов производства. Матричный метод применяется при решении задач межотраслевого баланса, а так же решения отраслевых задач оптимального планирования развития и размещения производства, в эколого-экономическом моделировании.

Несмотря на специфику матричных моделей различных уровней иерархии их объединяет, во-первых, общий формальный принцип построения и единство системы расчетов и, во-вторых, идентичность важнейших экономических характеристик – коэффициентов прямых и полных затрат.

Методы анализа временных рядов

Анализ временных рядов – важная область исследования динамики изменения экономических показателей. Они делятся на моментальные ряды (данные которых характеризуют величину явления по состоянию на определенные даты) и интервальные ряды (характеризующие определенные периоды). Кроме того, что очень важно, они

могут характеризовать эволюторные процессы содержащие *тренд*, и стационарные процессы, не содержащие тренда.

Основное понятие *анализа временного* (динамического) *ряда*: тренд, или длительная, “вековая” тенденция; *лаг*, или запаздывание одного явления от другого, связанного с ним; периодические *колебания* (сезонные, циклические и др.). Для выявления тенденции, лагов, колебаний и анализа временного ряда применяется ряд методов. Среди них *экстраполяция* – продолжение ряда на будущее по выявленной закономерности его развития, *выравнивание временного ряда* для устранения случайных отклонений, *анализ автокорреляции, спектральный анализ*.

При анализе временных рядов автокорреляционная функция характеризует внутреннюю зависимость между временным рядом и тем же рядом, но сдвинутым на некоторый промежуток (сдвиг) времени. Поскольку большое распространение в экономических исследованиях имеют модели с лагом, равным одному году, то в автокорреляцию еще определяют как корреляционную зависимость между соседними значениями уровней временного ряда.

Спектральный анализ является одним из методов анализа временного ряда, при котором ряд рассматривается как сложная совокупность, смесь гармонических колебаний, накладываемых друг на друга. При этом основное внимание уделяется частоте колебаний; используется в частности аппарат тригонометрических функций, разложения рядов, анализ автокорреляций. Спектральный анализ применяется при изучении колебаний деловой активности, корректировки сезонных колебаний для более наглядного представления трендов.

Статистическое моделирование

Статистическое моделирование – один из наиболее общих и универсальных методов исследования реальных процессов (в том числе и экономических), протекающих в обстановке воздействия случайных возмущений и колебаний значений основных параметров и характеристик. Статистическое моделирование (метод Монте-Карло, или метод статистических испытаний) используется в тех случаях, когда аналитические методы в условиях сложных взаимосвязей факторов и множества определяющих параметров оказываются бессильными.

Статистическое моделирование представляет собой метод компьютерной имитации изучаемого процесса, который как бы копируется на компьютере со всеми сопровождающими его случайностями. Используется главным образом, при решении задач исследования операций, в анализе производственной деятельности.

Корреляционный и регрессионный анализ

Корреляционным называется такой метод статистического анализа, при котором результаты наблюдений рассматриваются как случайные величины выбранные из совокупности, распределенной по нормальному закону. Применение *корреляционного анализа* в практике моделирования дает возможность проверить наличие связи между двумя явлениями или между отдельными явлениями и группой явлений и оценить ее степень, а также проверить гипотезу относительно формы связи.

Корреляционный анализ возможен, если результаты отдельных наблюдений стохастически независимы; результаты наблюдений являются выборкой из генеральной совокупности подчиненной закону нормального распределения.

Связь между случайными и неслучайными величинами называется *регрессионной*, а метод анализа зависимостей случайной величины от неслучайного аргумента – *регрессионным анализом*.

Главным направлением корреляционного и регрессионного методов анализа в экономических исследованиях является моделирование зависимостей между такими показателями производственных функций, как прибыль, объем выпуска продукции, себестоимость единицы изделия, капитальные затраты, производительность труда, фондоотдача и др.

Кластерный анализ

Кластерный анализ является одним из основных методов систематизации и обработки многомерных статистических данных, направленных на выявление характера и структуры взаимосвязей между отдельными компонентами рассматриваемого многомерного признака, что делает его незаменимым инструментом экономических исследований.

Кластерный анализ позволяет разбивать исследуемую совокупность элементов (координаты которых известны) таким образом, чтобы элементы одного класса находились на небольшом расстоянии друг от друга, в то время как разные классы были бы на достаточном удалении друг от друга и не разбивались на столь же взаимоудаленные части.

Краткое повторение

- ❑ **Методы дискретного программирования** – методы решения задач, искомые переменные которых целочисленные величины, а область допустимых значений конечна.
- ❑ **Методы параметрического программирования** – методы решения оптимизационных задач, коэффициенты целевых функций которых или числовые характеристики ограничений, или и те и другие, не постоянные величины, а функции зависящие от ряда параметров.
- ❑ **Матричный метод** – метод исследования взаимосвязей между отдельными экономическими объектами с помощью матричных моделей. Основывается на математической теории матриц.
- ❑ **Статистическое моделирование** – метод компьютерной имитации изучаемого процесса, который копирует на компьютере моделируемый процесс с всякого рода различными случайностями, которые его сопровождают.

§ 2.3. Типы производственных задач

Задачи распределения ресурсов

Задачи распределения ресурсов – один из наиболее важных типов решаемых производственных задач. Их можно условно разделить на три основные группы. Задачи первой группы характеризуются следующими формализуемыми условиями. Существует ряд работ (объектов), для выполнения (обеспечения) которых можно привлекать различные материальные ресурсы. Каждый их вид имеется в ограниченном количестве, но всех ресурсов достаточно для выполнения работ. Нужно их так распределить, чтобы достигнуть максимума общей эффективности. Если ресурсов достаточно, чтобы каждую работу выполнить наиболее эффективно, задача не возникает. В простейшем случае для выполнения работ может быть использован один ресурс. Причем число работ и ресурсов одинаковое. Задача сводится к такому распределению ресурсов по работам (объектам), при котором достигается наибольший эффект (например, максимум прибыли или минимум затрат). Такие задачи называют задачами о назначении. Они усложняются, если для выполнения некоторых работ требуется более одного вида ресурсов или если один и тот же ресурс может пойти для выполнения нескольких работ.

Вторая группа задач связана с распределением ограниченных ресурсов, которых не хватает для выполнения всех наличных работ. В связи с этим от выполнения части работ приходится отказаться. Могут быть использованы следующие подходы: заявки на ограниченные ресурсы урезаются пропорционально величине заявленной потребности; ограниченные ресурсы распределяются путем последовательного удовлетворения различных направлений в порядке убывания приоритета, формируемого экспертами; продукция распределяется с учетом потерь от дефицитности. В последнем случае строится функция дефицитности, выражающая потери, которые возникают вследствие недопоставки продукции.

В задачах третьей группы имеется некоторая возможность для регулирования состава ресурсов.

Задачи распределения ресурсов могут решаться в статической (однократной) и динамической постановке. В последнем случае часто применяют методы *стохастического программирования* (в которых принятие решения основано на вероятностных оценках будущих значений параметров).

Задачи управления запасами

Методы оптимального планирования применяются и при решении разного рода задач связанных со снабжением сырьем и материалами промышленных предприятий, сбытом готовой продукции, оптимальным управлением запасами. Наиболее разработанными в настоящее время являются задачи оптимального управления поступающими ресурсами и их потреблением. Однако на практике возникает необходимость решения задач управления не только запасами ресурсов, но и готовой продукции в их взаимосвязи.

Производственные запасы – это сырье, материалы, полуфабрикаты и топливо, находящиеся в распоряжении предприятия, но еще не вступившие в процесс производства. Их наличие является необходимым условием любого промышленного производства.

Задачи управления запасами возникают тогда, когда имеются два вида издержек: возрастающих с ростом запасов и убывающих с их ростом. Первые обусловлены расходами на хранение запасов и иммобилизацией средств в запасах. Вторые издержками производства связанными с простоем оборудования. При увеличении запасов убывают потери, вызванные простоем оборудования вследствие дефицита сырья. Уменьшаются расходы на выполнение подготовительно-заключительных операций. Сокращаются издержки производства, так как крупносерийное или поточно-массовое производство более эффективно, чем мелкосерийное или индивидуальное.

Главная *задача управления запасами* заключается в минимизации убытков, связанных с их хранением, затратами на содержание запасов, выполнение складских операций, потери от порчи при хранении и морального старения, потерь от дефицита сырья и материалов из-за недостатков запасов и их организации. В результате решения задачи получают ответ относительно оптимальных размеров заказываемой партии, величины уровня запасов, выбора мест размещения заказов и др.

Задача управления запасами может быть как статической

(когда принимается разовое решение об уровне запаса на определенный период) так и динамической, или многошаговой (когда принимаются последовательные решения или корректируется ранее принятое решение с учетом происходящих изменений).

Задачи массового обслуживания

Задачи массового обслуживания получили в последнее время очень широкое распространение. Появление этих задач вызвано потребностью практики в анализе процессов, приводящих к скоплению, задержкам в обслуживании и очередям. Они занимают анализ образования очередей. Примерами решения такого рода задач может служить улучшение работы ремонтных служб промышленных предприятий, сферы обслуживания, телефонных станций.

Под требованием на обслуживание в такого типа задачах, понимается необходимость в обслуживании, исходящего от какого-либо объекта, а также сам объект вне зависимости от того, что он собой представляет; под очередь – любое скопление объектов, ожидающих обслуживания. Технические средства или производственный персонал, выполняющие функции обслуживания, называются каналами обслуживания. Все, что становится в очередь и подвергается операции обслуживания независимо от природы, носит название “клиента”. Порядок, в соответствии с которым клиенты покидают очередь, поступая в обслуживание, именуют “дисциплиной очереди”.

Совокупность, в которой последовательно связаны между собой поток требований на обслуживание, очередей и каналов обслуживания, представляет собой задачу массового обслуживания. Цель задач теории массового обслуживания – анализ процесса образования очередей, взаимосвязей между их основными характеристиками и выявление наилучших путей управления ими.

В системах массового обслуживания почти всегда имеются ожидающие клиенты или простаивающие каналы. Этим факторам соответствуют определенные затраты, к числу которых относятся издержки, связанные с потерей клиентов с одной стороны и простоем оборудования с другой. Таким образом, задача сводится к минимизации всех видов издержек. Анализ полезно проводить до проектирования систем массового обслуживания, чтобы выбрать ее оптимальную структуру.

**Задачи
упорядочения и
согласования**

В задачах такого типа принимается, что порядок выбора клиентов задан заранее. Содержанием *задачи упорядочения и согласования* будет выбор дисциплины очереди с таким расчетом, чтобы некоторый принятый критерий функционирования системы достиг экстремального значения. Таким критерием может быть время обслуживания, издержки, связанные с переналадкой оборудования, и др. С экономической точки зрения определенным интересом представляют *задачи сетевого планирования и теории расписаний*. Порядок следования операций у них известен заранее и определяется ходом выполнения работ. Он зафиксирован в виде *сетевого графика*, но моменты начала операций и сроки их выполнения заранее могут быть и не фиксированными. Суть состоит в выборе моментов начала операций и сроков их выполнения так, чтобы минимизировать общие затраты по реализации комплекса операций. Методы сетевого планирования дают возможность выявлять потребность в ресурсах при заданных сроках выполнения работ. На практике далеко не для всех операций можно заранее установить строгую последовательность их выполнения. Кроме того, существуют технологии, для которых не требуется дополнительная переналадка оборудования. Порядок выполнения операций иногда может диктоваться заказчиком или устанавливаться экспериментальным путем.

Раздел исследования операций, который изучает порядок их следования, называется *теорией расписаний*. Следует отметить, что существует различие между упорядочением и составлением расписания. Упорядочение подразумевает формирование очередности операций, выполняемых одной машиной, в то время как составление расписания означает задание последовательности действий нескольким машинам.

Задачи упорядочения и согласования как бы противоположны *задачам теории массового обслуживания*, в которых дисциплина (т. е. порядок выполнения требований) задана. Выбор порядка обслуживания в этом случае называется упорядочением.

Для решения этих задач используется ряд методов линейного программирования, дискретного программирования, методы ветвей и границ, сетевого планирования управления. Последнее время особое развитие принимают приближенные методы решения, резко сокращающие перебор вариантов, метод *Монте-Карло*.

Задача выбора маршрута

К задачам упорядочения тесно примыкают *задачи выбора маршрута*. При всем многообразии их можно разделить на два класса – на маршрутизацию мелких партий грузов и маршрутизацию по машинных отправок грузов.

В первом случае за рейс осуществляется мелкопартионная доставка грузов нескольким потребителям; во втором – транспортное средство загружается полностью в адрес только одного потребителя.

Задача выбора маршрута наиболее близко примыкает к сетевым. Типичный ее пример – отыскание рационального маршрута для перевозок из одного пункта в другой при наличии различных маршрутов между ними. Стоимость проезда зависит от выбранного маршрута и может оцениваться временем в стоимостном выражении или расстоянием.

Сеть определяется как некоторое множество точек или узлов, связанных линиями, называемыми дугами или ребрами. Непрерывная последовательность ребер, связывающаяся в один узел с другим, именуется маршрутом или путем. Сетевая модель способна отобразить с любой степенью детализации состав и взаимосвязи работ во времени. Выбор маршрута заключается в отыскании такого пути, связывающего два и более узлов, который минимизирует (или максимизирует) некоторый критерий оптимальности, представляющий собой функцию (как правило сумму) известных характеристик ребер этой сети. На допустимые маршруты могут быть наложены ограничения: например запрет возвращения к уже пройденному узлу.

Типичным примером такой задачи является задача о коммивояжере. Коммивояжер (развозчик заказанной продукции), выехав из некоторого пункта, должен развести ее потребителям, побывав у каждого только по разу, и вернуться в исходный пункт за кратчайший срок. Маршрут при этом, должен быть наименьшим.

При маршрутизации по машинных отправок известен план перевозок в некоторой системе маршрутов. Задан состав подвижных транспортных средств. Нужно так сконструировать маршруты, чтобы выполнить план перевозок, минимизировав или максимизировав выбранный критерий оптимальности.

Задача о коммивояжере – одна из типичных задач, решаемых методом *динамического программирования*.

**Задача
замены
оборудования**

К задачам теории управления запасами по экономическому содержанию очень близки *задачи теории восстановления (замены)*. Существует два основных типа задач. В первом речь идет о замене элементов, характеристики которых ухудшаются в процессе их использования или с течением времени. Для решения некоторых из таких задач применимы методы *динамического программирования*. Во втором характеристики элементов не ухудшаются, но сами они полностью выходят из строя спустя некоторое время. В этих задачах широко используются *математико-статистические методы*, так как выход из строя оборудования всегда носит нерегулярный, вероятностный характер. Элементы с ухудшающимися характеристиками, как правило, представляют собой крупные и дорогие объекты, например технологическое оборудование, станки, складские постройки и т. д. Элементы с не ухудшающимися характеристиками обычно сохраняют достаточно высокую эффективность на протяжении всего срока службы, но внезапно полностью выходят из строя. Они относительно дешевы. К ним относятся электрические лампы, нагревательные элементы, подшипники, приводные ремни и т. д. Чтобы сохранить эффективность элементов первого типа, требуется их обслуживание и ремонт, что сопряжено с затратами. Если менять такие элементы часто, то возрастает объем капиталовложений.

Таким образом, задача замены оборудования сводится к установлению порядка и сроков замены, при которых эксплуатационные затраты и капиталовложения минимальны. Если элементы выходят из строя, то необходимо выяснить целесообразность (частоту) групповой или индивидуальной замены, чтобы свести ущерб от простоя оборудования к минимуму.

Задачи замены по существу динамические. Они должны в той или иной степени иметь следующие свойства: могут учитываться или не учитываться изменение расходов на эксплуатацию, эффективность капиталовложений, изменение амортизационных отчислений и т. д.; потребности в технологическом оборудовании могут быть изменяющимися со временем или приближенно считаться постоянными; могут браться или не браться во внимание изменения связанные с технологическим прогрессом, внедрением нового оборудования и т. д.

Задача о раскрое

Задача о раскрое – частный случай задачи комплексного использования сырья, решаемой при помощи методов линейного программирования. Разработанный метод решения этой задачи позволяет с наименьшим количеством получаемых отходов раскраивать прутки и листы металла, листы стекла, картона и рулонных материалов с учетом требуемого количества получаемых деталей различных размеров. Постановку задачи в наиболее общем виде можно сформулировать так: требуется найти минимум линейной формы, выражающей количество расходуемых материалов (прутков, листов, рулонов и т.п.) при различных вариантах способов их раскроя $j = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

при условии, что переменная x_j удовлетворяет ограничению

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq r_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

Это означает, что соблюдается необходимое условие комплексности заготовок. Все необходимые заготовки, получены в достаточном количестве r_i (a_{ij} – количество заготовок типа i при способе раскроя j , x_j – количество прутков, листов и рулонов материалов раскroенных способом j). Выполняется условие неотрицательности переменных

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.3)$$

т.е. количество раскраиваемых прутков или листов не может быть отрицательным. Решение этой задачи дает возможность сократить количество отходов получаемых при раскroе заготовок до минимальной величины. Часто на предприятиях количество полученных отходов сокращается в несколько раз, что дает возможность значительно снизить себестоимость выпускаемой продукции.

Краткое повторение

- **Задачи распределения ресурсов** – задачи выбора наилучшего варианта распределения лимитированных ресурсов, при котором максимизируется величина получаемой прибыли или минимизируются затраты.
- **Задачи управления запасами** – задачи оптимизации управления поступающими ресурсами, их хранения и потребления. Целью решения задачи является минимизация потерь от дефицита, затрат на складские операции, убытков порчи при хранении и морального старения.
- **Задачи массового обслуживания** – задачи целью которых является анализ процесса образования очередей, взаимосвязей между их основными характеристиками и выявление наилучших путей управления ими.
- **Задачи упорядочения и согласования** – задачи выбора дисциплины очереди в соответствии с некоторым выбранным критерием функционирования системы, стремящимся достичь экстремального значения. Таким критерием может быть время обслуживания, издержки, связанные с переналадкой оборудования, и др.
- **Задача о раскрое** – задача рационального раскроя материалов (прутков, листов, рулонов). План раскроя этих материалов считается оптимальным, если он обеспечивает необходимый выход заготовок, при наименьшем количестве отходов.

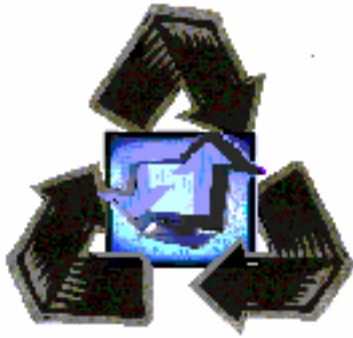
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

анализ временных рядов	прескриптивная модель
дескриптивная модель	прикладная модель
детерминированная модель	пространственная модель
динамическая модель	распределение ресурсов
динамическое программирование	регрессионный анализ
дискретное программирование	статистическое моделирование
закрытая модель	статическая модель
кластерный анализ	стохастическая модель
корреляционный анализ	структурная модель
лаг	теоретико-аналитическая модель
линейное программирование	теория поиска
макромодель	точечная модель
массовое обслуживание	тренд
матричный метод	управление запасами
микромодель	функциональная модель
открытая модель	экзогенные переменные
параметрическое программирование	эндогенные переменные

**Контрольные вопросы
и задания**



1. Признаки классификации моделей.
2. Основные классы моделей.
3. Методы решения экономико-математических задач.
4. Методы решения оптимизационных задач.
5. Методы решения неоптимизационных задач.
6. Методы линейного программирования.
7. Методы дискретного программирования.
8. Методы параметрического программирования.
9. Методы динамического программирования.
10. Матричный метод.
11. Методы анализа временных рядов.
12. Методы статистического моделирования.
13. Методы корреляционно-регрессионного анализа.
14. Кластерный анализ.
15. Типы производственных задач.
16. Задача о раскрое.
17. Задачи выбора маршрута.
18. Задачи замены оборудования и поиска.
19. Задачи распределения ресурсов.
20. Задачи массового обслуживания.
21. Задачи упорядочения и согласования.
22. Задачи управления запасами.



Часть II

Методы и приемы экономико-математического моделирования

☑ **Тема 3.** *Методы и приемы моделирования*

§ 3.1. Методы построения моделей

§ 3.2. Метод структурного моделирования

§ 3.3. Декомпозиционный и композиционный подходы

☑ **Тема 4.** *Построение оптимизационных моделей*

§ 4.1. Методы линейного моделирования

§ 4.2. Приемы линейного моделирования

§ 4.3. Построение блочной модели

Глава

3

МЕТОДЫ И ПРИЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В этой главе будут рассмотрены методы, которые наиболее часто используются в практике построения моделей. Показаны основные приемы моделирования, возможности структурирования моделей, межмодельного интерфейса параметров, а также декомпозиционный и композиционный подходы в моделировании.

§ 3.1. Методы построения моделей

Метод “черного ящика”

Промышленное производство как объект для моделирования характеризуется огромным количеством различных показателей и числовых параметров, которые в зависимости от их значимости могут быть включены в модель.

Скажем предприятие, как объект можно охарактеризовать его производственной мощностью, численностью занятых рабочих, местоположением, размерами производственных площадей, величиной и составом основных и оборотных фондов, количеством потребляемой воды, объемом и загрязнением стока, высотой заводской трубы, особенностями организации производства и управления и т. д. Для построения модели необходимо не просто указать наименование объекта, но и отразить наиболее важные взаимосвязи и показать отдельные элементы, т. е. определить границы взаимодействия с внешней средой, его структуру.

Менеджера будут интересовать лишь отдельные характеристики работы предприятия, причем не всегда одни и те же – в зависимости от стоящих перед ним задач. При решении задач оперативного управления очень важными являются мощность завода, запасы сырья, а производственные площади могут и не рассматриваться. Напротив,

при разработке планов реконструкции предприятия наличие запасов сырья не имеет значения, а важными характеристиками становятся производственные площади, доля устаревшего оборудования, инфраструктура района, в котором расположен завод и т.п. Эколога, прежде всего, интересуют объемы сброса сточных вод, выбросы в атмосферу, состояние очистных сооружений, высота заводской трубы. Поэтому, когда каждый из них говорит о предприятии как объекте исследования то всегда явно или неявно имеет в виду определенные, принимаемые во внимание технико-экономические характеристики его работы, межпроизводственные связи. Однако в любом случае модель есть ни чем иным, как отражением объективной реальности.

Сущность экономико-математического моделирования состоит в известном упрощении решаемой задачи. Модель промышленного производства не может отразить всех особенностей описываемой ею реальной действительности. Реальность предстает в модели не полностью, а лишь по основным характеристикам изучаемых явлений и связей. Многие (быть может, и достаточно существенные) моменты действительности порой не находят своего отражения в модели, в то время как другим уделяется особое внимание. В основе любой из моделей лежит ряд важнейших предположений, определяющих исходные принципы построения модели. Формулировка и последовательная реализация этих принципов при построении модели необходимы для правильного понимания результатов решения задачи.

Известным методом, который довольно широко используется в практике моделирования, является метод *“черного ящика”*.

Метод “черного ящика” – условное название метода моделирования, когда исследователю доступны лишь входные и выходные параметры рассматриваемого объекта, а его структура и процессы протекающие внутри – неизвестны.

Особенностью метода является то, что абстрактный образ объекта, исследуемый по средствам *функциональной модели*, предстает в виде *черного ящика* – объекта, внутренняя структура которого не видна. Основная идея метода заключается в том, чтобы познать

§ 3.1. Методы построения моделей

сущность изучаемого объекта через важнейшее проявление этой сущности – функционирование. Для моделей промышленного производства, это означает возможность моделирования производственных процессов глубоко не вникая в технологические особенности переработки сырья, хранения и транспортировки готовой продукции.

Основополагающим в реализации данного метода, является установление возможных входов и выходов, определение их взаимосвязей и интенсивностей моделируемых производственных процессов. При этом, мы имеем возможность для изучения моделируемого объекта, рассматривая возможные изменения на выходе соотносительно изменениям на входе. Статистический многократный учет таких изменений позволяет установить закономерные взаимозависимости между поведением входов и выходов, что дает возможность управления производственным процессом. Для процесса

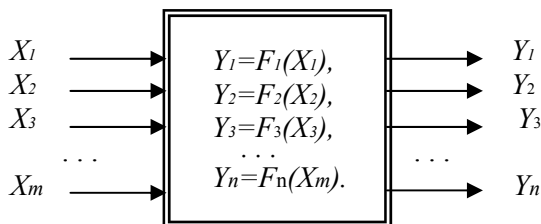


Рис. 3.1. Схема входов и выходов «черного ящика»

производства продукции на предприятии входом служат поставки сырья, материалов, комплектующих изделий, оборудования, инвестиции. Выходом является готовая продукция, а состоянием – наличие финансовых средств, накопленные запасы средств производства, численность работающих. На рис. 3.1 показана схема моделируемого процесса производства с m входами и n выходами. Функциональная модель имитирует поведение объекта. Задавая входы X_m , можно получить значение выхода Y_n . Построить функциональную модель при этом, означает не что иное, как отыскать функцию $Y_n = F_n(X_m)$.

Для моделей такого типа характерным является то, что процесс производства рассматривается в несколько обособленном виде. В действительности это наблюдается крайне редко, так как трудно себе

представить производство, которое целиком изолировано от других производств. Но часто оказывается очень удобным пользоваться этой абстракцией, обрывая на некотором шаге внешние связи. Моделируемый производственный процесс, выступает носителем тех свойств, которые наиболее существенны для изучаемых функций исследуемого объекта. При этом всякий раз когда речь идет о конкретном объекте моделирования, он рассматривается как относительно обособленная часть системы, состоящей из конечного множества элементов – носителей определенных свойств. Все, что лежит вне системы, рассматривается как *внешняя среда*, взаимодействующая с этой системой.

Оценка работы промышленного предприятия по конечным результатам ее функционирования (по принципу “черного ящика”) неизбежно страдает неполнотой. Неявно предполагается, что по оценке полученных результатов можно однозначно судить о эффективности внутренней организации производства. Даже если бы это было так (что еще требует доказательства), подобная оценка все же была бы неконструктивной: она не позволит вынести позитивные рекомендации о том, какие необходимо внести изменения в организацию производства, чтобы повысить эффективность его работы.

Производство продукции на современном этапе промышленного развития – это результат совместного функционирования многих производственных комплексов, испытывающих на себе неодинаковое влияние окружающей обстановки и обладающих различной степенью инерционности. В этих условиях на основании количественных зависимостей между выходом и входом производственного процесса целиком реконструировать внутреннюю структуру организации, как правило, невозможно.

Метод “белого ящика”

Эффективное функционирование современного производства обуславливает необходимость более тесного взаимодействия предприятий взаимосвязанных отраслей промышленности, отдельных цехов и участков. Характер и теснота

этих связей во многом определяются техническими и организационными уровнями развития производства. В отличие от разного рода технологических систем, для которых эти связи определены еще на стадии проектирования, и биологических систем, где они возникают

§ 3.1. Методы построения моделей

естественным путем, производственные системы требуют их постоянного развития и совершенствования.

При исследовании внутренней структуры моделируемого объекта возникает вопрос: как выделить этот объект из множества других объектов? Как определить состав его элементов, их свойства и связи между ними и внешней средой? Что принять в качестве “первичного” элемента? На все эти вопросы, нет единых ответов. Они зависят от тех конкретных целей, которые ставит перед собой исследователь.

Если в представленном ранее методе, объект моделирования представлял собой единое целое, что не допускало какой-либо возможности его разбиения на части, то метод **“белого ящика”** ставит

*Метод **“белого ящика”** – условное название метода моделирования, когда исследователю известна внутренняя структура объекта и составляющие его элементы, на основе чего определяются количественные соотношения между его входами (выходами) и средой.*

своей задачей изучение внутренней структуры объекта, свойств составляющих его элементов, их взаимосвязей. Целью этого метода является установление количественных соотношений взаимодействия входов (выходов) исследуемого объекта со средой и функциональных зависимостей между отдельными элементами. В качестве первичного элемента, при этом берется объект, который выполняет определенные функции и не подлежит дальнейшему разбиению. Его связь с другими элементами и внешней средой, моделируется с помощью входов и выходов данного элемента. Будучи относительно обособленным, он по крайней мере, имеет один вход и выход. Отметим, что степень этого взаимодействия с другими элементами системы и внешней среды определяется на основе изучения характера взаимосвязей, установления возможного числа входов и выходов.

Количественной мерой взаимодействия входа (выхода) со средой является его интенсивность, т.е. количество (поток) вещества, энергии или информации, протекающей через него в единицу времени. Так,

интенсивность входов цеха – количество используемого сырья и материалов в единицу времени, а интенсивность выходов – количество продукции выпускаемой за то же время. Не менее важную роль играет и внутреннее состояние элемента. С его помощью характеризуются существенные свойства реального объекта. Так, внутреннее состояние цеха как объекта моделирования характеризуется величиной производственной мощности, численностью рабочих, средствами труда.

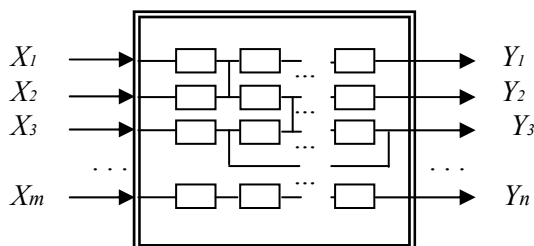


Рис. 3.2. Структурная схема входов и выходов “белого ящика”

Взаимодействие реальных объектов друг с другом и внешней средой столь же разнообразны, как свойства самих объектов и среды. При исследовании структуры модели моделируемого объекта во внимание берутся лишь те связи, которые существенно влияют на его функционирование, остальными в случае необходимости пренебрегают. На рис. 3.2 представлена функциональная структура элементов “белого ящика” с m входами и n выходами. Формирование связей отдельных элементов при этом, рассматривается как реализация определенных отношений. Эти отношения над множеством элементов и задают структуру объекта моделирования.

При комплексном изучении моделируемых объектов, особенно общественных, оказывается необходимым исследовать не один, а несколько структурообразующих признаков, рассмотреть взаимосвязь различных свойств. Так, любое промышленное предприятие является одновременно технологической структурой, преобразующей исходные ресурсы в конечную продукцию, организационной структурой координирующей всю производственную деятельность, социальной структурой, в которой происходит развитие всего

коллектива. Все эти стороны функционирования предприятия органически взаимосвязаны. Иными словами, при выделении какой-то одной из структур, задается не одно, а множество отношений между элементами и соответственно образуется не одна, а множество структур. Такого рода объекты характеризуются неоднородностью выделенных элементов и связей, структурным разнообразием.

Рассматривая функциональные и структурные модели, следует помнить, что их противопоставление носит относительный характер. Изучение структурных моделей дает ценную информацию о поведении объекта в зависимости от меняющейся внутренней структуры и внешних условий. Исследование параметров процесса или режима функционирования рассматриваемого объекта показывает изменение состояния моделируемой системы. При изучении функциональных моделей возникают гипотезы о причинах тех или иных реакций исследуемого объекта на воздействие *внешней среды*. Это позволяет сделать ряд необходимых предположений относительно внутренней структуры исследуемого объекта, что открывает широкие возможности для структурного анализа.

Краткое повторение

- ❑ Метод **“черного ящика”** – условное название метода экономико-математического моделирования, когда исследователю доступны лишь входные и выходные параметры рассматриваемого объекта, а его структура и процессы протекающие внутри – неизвестны.
- ❑ Метод **“белого ящика”** – условное название метода моделирования, когда исследователю известна внутренняя структура объекта и составляющие его элементы, на основе чего определяются количественные соотношения между его входами (выходами) и внешней средой.

§ 3.2. Метод структурного моделирования

Построение структурированных моделей

Одной из наиболее сложных проблем в практике построения экономико-математических моделей является *структурирование* решаемых задач. Значение структуризации экономики народного хозяйства для разработки системы моделей определяется тем, что выделение отраслевых подсистем в отдельные объекты означает необходимость построения соответствующих экономико-математических моделей и установления связей между ними. В ходе структуризации вся совокупность рассматриваемых объектов и процессов, имеющих отношение к исследуемой проблеме, разделяется на собственно изучаемую систему и внешнюю среду. Выделяются отдельные составные части как подсистемы и элементы изучаемой системы, а учитываемое внешнее воздействие представляется в виде совокупности элементарных воздействий. При этом любой объект исследований рассматривается не как одно неразделимое целое, а как система взаимосвязанных элементов. Например, предприятия отдельных отраслей промышленности, рассматриваются как *элементы системы* и изучается их взаимосвязь.

Структуризация модели предусматривает необходимость уточнения исследуемой проблемы и ее *структурирование* в серию задач, решаемых с помощью экономико-математических методов, нахождение критериев их решения, детализации целей, конструирования эффективной организации. В этой связи различают три вида структурных моделей:

- все неизвестные выражаются в виде явных функций от внешних условий и внутренних параметров объектов;
- неизвестные определяются из системы известных соотношений (уравнений, неравенств и т. д.);
- неизвестные определяются из системы соотношений, известных лишь в общей форме.

Прикладные разработки структурированных моделей опираются в

основном на существующую организационную структуру народного хозяйства. Вместе с тем из анализа всего народного хозяйства с позиций экономико-математического моделирования можно сделать предложения по совершенствованию существующей организационной структуры. Такие предложения преследуют цели более полной оптимизации структуры отдельных подсистем, более эффективного согласования отдельных локальных оптимумов с глобальным оптимумом народного хозяйства.

При построении локальных оптимизационных задач вопросы определения ограничений и критериев оптимальности следует решать совместно. Нельзя корректно сформулировать ограничения, пригодные для любых критериев, так же нельзя корректно сформулировать критерий, одинаково приемлемый при различных ограничениях. Наиболее общим критерием для определения границ каждой из подсистем служит теснота связей составляющих ее элементов внутри данной подсистемы с элементами других подсистем.

Многоуровневая система народного хозяйства включает как вертикальные, так и горизонтальные связи между различными иерархическими структурами. Различают одноуровневые и многоуровневые структуры. Экономические структуры являются многоуровневые. Им присуща *полиструктурность*, т. е. взаимное переплетение разнокачественных подсистем, они могут образовывать несколько взаимосвязанных между собой иерархических структур (производственно-технологических, организационно-управленческих, территориальных, социальных и др.). Выделение подсистемы как самостоятельного экономического объекта (и объекта моделирования) оправдано тем больше, чем сильнее ее внутренние связи и чем слабее связи внешние.

Межмодельный интерфейс параметров

При разбиении народнохозяйственной системы на отдельные подсистемы для каждой из них необходимо разработать экономико-математическую модель или ряд связанных между собой моделей.

Модель подсистемы включает описание внутренних условий функционирования (собственные ограничения, определяющие область допустимых планов), внешних связей (“входов” и “выходов”) и как правило, критерий оптимальности. Решения получаемые изолировано

для отдельных подсистем, как правило, не совместимы. Это выражается в несоответствии входов и выходов связанных между собой моделей, в невыполнении общесистемных ограничений при объединении решений подсистем. Но даже если решение подсистемы в совокупности образует допустимый план, то крайне маловероятно, что полученный таким путем народнохозяйственный план будет оптимальным. Сущность проблемы согласования моделей состоит в том, чтобы путем изменения величин параметров входов и выходов, получить сочетание (композицию) решений подсистемы, дающее сбалансированное решение для всей системы.

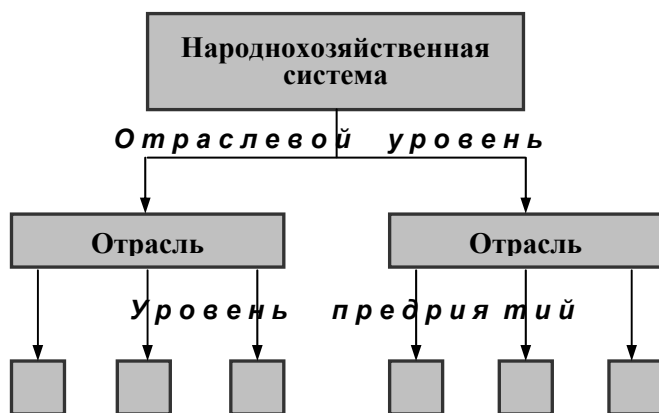


Рис. 3.3. Структура системы моделей

Общая структура системы моделей представлена на рис. 3.3. Практически реализуемая система моделей является “открытой”: она не исчерпывает всех задач планирования (особенно на первых этапах реализации) и требует внешнего информационного дополнения.

Характеристиками входа обычно являются величина и структура затрат материальных ресурсов (сырье, материалы, инвестиции, энергетические и другие ресурсы) и условия их производственного потребления (технологические способы производства, природные и климатические условия и пр.); характеристиками выхода – результаты производства и экономической эффективности (себестоимость,

рентабельность, прибыль и пр.). Параметры “входа” и “выхода” могут рассматриваться как переменные величины, находящиеся между собой в определенной зависимости.

Обмен информацией между моделями, входящими в систему организуется таким образом, чтобы в результате итеративных пересчетов найти вариант оптимального плана в укрупненных показателях, увязанный с проектировками производственных подсистем разного уровня.

Методы расчета параметров моделей

Параметры составляют основу, каркас для построения экономико-математических моделей. Численные значения параметров определяют на предварительной стадии проведения оптимизационных расчетов. Значения параметров моделей определяются по результатам, полученным на основе экспериментальных расчетов. В практике экономико-математического моделирования одним из наиболее употребляемых является метод *корреляционно-регрессионного анализа*. Пространственная совокупность промышленных объектов одной отрасли достаточно неоднородна и обладает определенной структурой, т.е. общая совокупность распадается на ряд подсовкупностей, имеющие свои отличные характеристики зависимостей экономических показателей от входных переменных.

Пространственная неоднородность совокупности объектов проявляется из-за различия уровней техники, технологий и организации производства на отдельных объектах совокупности. Одной из основных причин различия уровней этих характеристик выступает время ввода объекта в эксплуатацию, его “возраст”. Объекты, построенные в один или близкий календарный период, как правило, имеют близкий уровень техники и технологии производства. И наоборот, объекты разных “поколений” обычно существенно различаются между собой по своим характеристикам и характеру влияния различных факторов производства на экономические показатели.

Изучение технического уровня развития производства моделируемой совокупности объектов отраслевой системы, представляет собой задачу многомерной классификации, решаемую при помощи метода *кластерного анализа* на предоптимизационной стадии вычислений. Суть этой задачи заключается в следующем. Имеется совокупность промышленных предприятий, технический уровень

которых описывается системой характеристик, как количественных, так и качественных. Совокупность исследуемых объектов подвергается многомерной классификации по этому комплексу характеристик. Каждый из выделяемых классов будет объединять предприятия, близкие между собой по значениям комплексных характеристик, т.е. имеющих примерно одинаковый технический и технологический уровень. Это дает возможность проведения анализа технического уровня производства на предприятиях отрасли в данный момент времени с позиций самой отрасли, представленной теперь некоторым обозримым числом классов.

В перспективных планах развития промышленного производства обычно предусматривается ввод в эксплуатацию значительного числа новых предприятий. Длительность их строительства и время пуска оказывает большое влияние на экономические показатели выпуска продукции предприятиями отрасли. При этом точность отраслевого планирования во многом зависит от точности оценки динамики показателей вновь построенных объектов в период освоения. Исследование процесса освоения имеет большое значение и для экономического анализа.

В общем виде содержание задачи прогнозирования сводится к следующему: на основе некоторых априорно известных характеристик вновь построенных промышленных объектов необходимо оценить наиболее вероятное значение параметров процесса освоения этих объектов. Для изучения динамики изменения абсолютных величин используются *методы прогнозирования*. Применение этих методов на стадии предварительных вычислений значительно повышает точность оптимизационных расчетов.

Краткое повторение

- ❑ **Метод структурного моделирования** – название метода структуризации исследуемой проблемы, в серию решаемых экономических задач.
- ❑ **Межмодельный интерфейс параметров** – организация обмена информации между моделями, входящими в систему моделей.

- ❑ **Агрегированные переменные** – объединенные, укрупненные переменные, полученные на основе преобразования модели в модель с меньшим числом переменных и ограничений.
- ❑ **Деагрегированные переменные** – детализированные переменные, полученные в результате трансформации модели в модель большей размерности.

§ 3.3. Декомпозиционный и композиционный подходы

Декомпозиционный подход в моделировании

В основе *декомпозиционного* подхода к построению системы экономико-математических моделей лежит представление о том, что исследуемый объект может быть представлен в виде глобальной оптимизационной модели, которую можно разбить на модели подсистем и получить оптимальное решение в процессе итеративного согласования локальных решений.

Выделение подсистем и построение их моделей (множества допустимых вариантов развития и локальных критериев оптимальности) осуществляется одновременно с выбором схемы согласования решений моделей подсистем. При этом локальные критерии специальным образом выводятся (редуцируются) из глобального критерия оптимальности. Согласование решений моделей подсистем одного уровня, формализуемой иерархической структуры, осуществляется посредством моделей подсистем более высокого уровня (в частности модели “центра” в двухуровневой системе), которым придаются необходимые координирующие функции.

Математическую основу декомпозиционного подхода составляет математическое программирование. Согласование решений осуществляется в итеративном процессе обмена информацией между моделями нижнего и верхнего, координирующего уровней. Информация может преобразовываться при передаче ее между различными уровнями иерархии: сжиматься (агрегироваться) при движении на верхние уровни и детализовываться (деагрегироваться)

при ее движении в обратном направлении. Координирующее воздействие состоит в уточнении параметров критериев оптимальности и условий, формирующих множество допустимых планов подсистем. Принято выделять два типа информационных потоков: натуральные показатели, характеризующие материально-вещественные взаимосвязи и ресурсно-технологические возможности подсистем (задания и объемы производства продукции, лимиты и потребности в ресурсах общесистемного назначения и т. п.); ценностные показатели (цены, процент за кредит, оценка дефицитности ресурсов и т.д.).

Метод “декомпозиции” – название метода моделирования, основанного на рациональном разбиении модели большой размерности на несколько взаимосвязанных моделей меньшей размерности и решения отдельных подзадач с последующим согласованием частных решений для получения общего оптимального решения.

При декомпозиции отдельные локальные подсистемы модели рассматриваются как обособленные звенья, но критерии их развития строятся таким образом, чтобы находимые решения в наибольшей мере отвечали глобальному критерию. В сущности, здесь нет проблемы согласования глобальных и локальных интересов, поскольку вменяемые подсистемам критерии не всегда отражают их собственные (внутренние) интересы. Итеративные процедуры присущие декомпозиционным методам, реализуют не процесс согласования локальных и глобальных интересов, а корректируют направленность отдельных критериев на достижение общей цели.

Композиционный подход в моделировании

Система моделей *композиционного* типа собирается из моделей отдельных подсистем. Ее главное отличие от системы моделей, построенной по принципу декомпозиции, заключается в следующем.

Во-первых, локальные критерии оптимальности отражают внутренние (имманентные) интересы подсистемы, а не выводятся из глобального критерия, а во-вторых, эти локальные критерии заранее не сводятся в

§ 3.3. Декомпозиционный и композиционный подходы

глобальный критерий оптимальности. Таким образом, моделируемые подсистемы рассматриваются как объекты, ориентирующиеся в своей деятельности на собственные интересы. Критерий, выражающий в конечном счете глобальный оптимум, при таком подходе может быть получен путем синтеза локальных критериев оптимальности при некоторых условиях сочетания интересов отдельных подсистем.

Метод композиции – название одного из методов моделирования, основанного на выстраивании моделируемой экономической системы из моделей отдельных подсистем и получения единого решения на основе синтеза критериев оптимальности.

Система моделей, построенная в соответствии с композиционным подходом, состоит из двух основных частей: условий, описывающих функционирование отдельных подсистем, и координирующих условий, связывающих эти подсистемы. При этом координирующие условия, как правило, имитируют наиболее существенные аспекты функционирования реального экономического механизма. Путем изменения правил, регулирующих взаимоотношения между подсистемами (элементов экономического механизма), можно влиять на процесс выполнения расчетов выбора возможных вариантов развития, как всей моделируемой системы, так и ее подсистем.

При композиционном подходе (в частности, в моделях экономического взаимодействия) согласование решений имитирует действие экономического механизма при этом может осуществляться как горизонтальная, так и вертикальная координация функционирования подсистем. Анализ моделей позволяет выделить множество сбалансированных вариантов развития народного хозяйства, улучшения положения всех подсистем, а также множество возможных вариантов решения, где интересы различных подсистем вступают в противоречие, и требуется находить компромиссы.

□ **Метод декомпозиции** – метод моделирования, который основан, на рациональном разбиении модели большой размерности на несколько взаимосвязанных моделей

меньшей размерности и решения отдельных подзадач с последующим согласованием частных решений для получения общего оптимального решения.

❑ **Метод композиции** – название метода моделирования, основанного на выстраивании моделируемой экономической системы из моделей отдельных подсистем и получения единого решения на основе синтеза критериев оптимальности.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

агрегированные переменные
деагрегированные переменные
декомпозиционный подход
композиционный подход
межмодельный интерфейс параметров

метод “белого ящика”
метод “черного ящика”
структурирование моделей
полиструктурность

***Контрольные вопросы
и задания***



1. Что представляет собой метод “черного ящика”?
2. Что представляет собой метод “белого ящика”?
3. Построение структурированных моделей.
4. Межмодельный интерфейс параметров.
5. Методы расчета параметров.
6. Подходы к построению системы моделей.
7. Декомпозиционный подход в моделировании.
8. Композиционный подход в моделировании.

Глава

4

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

В этой главе будут рассмотрены методы, которые наиболее часто применяются при построении оптимизационных моделей. Рассмотрены основные постулаты линейного программирования. Показаны приемы, которые очень часто используются при построении экономико-математических моделей.

§ 4.1. Методы линейного моделирования

Модель с линейными зависимостями

Линейные экономико-математические модели являются в настоящее время наиболее разработанным инструментом экономических исследований. Этому немало способствует как сравнительная простота получения оптимизационных решений, так и возможность их экономической интерпретации. В линейных моделях промышленного производства выпуск продукции задается с помощью множества *технологических способов*. Каждый из способов при этом, является одним из альтернативных вариантов производства того или иного вида продукции и задается в матрице модели как вектор-столбец коэффициентов затрат и выпуска. Размерность вектор-столбца матрицы модели определяется числом используемых в процессе производства компонент, ресурсы которых ограничены. Любая из компонент технологического способа производства может быть интерпретирована как норма расхода какого-либо ресурса на единицу выпускаемой продукции. В наиболее общей форме эта задача может быть рассмотрена как задача распределения лимитированных ресурсов. Распределение сырья, материалов, электроэнергии, водных

ресурсов, финансовых средств, рабочей силы, транспорта, оборудования и т. д. – все это задачи распределения ресурсов.

Модель распределения лимитированных ресурсов может быть формализована и представлена в следующем виде: на основании n возможных технологических способов производства продукции $j = \overline{1, n}$ и имеющихся у предприятия m видов ресурсов, количество которых равно b_i , $i = \overline{1, m}$, необходимо найти один из оптимальных вариантов их использования, при котором величина получаемой прибыли будет максимальной. Для этого введем следующие обозначения:

j – технологический способ производства продукции;

n – число технологических способов производства;

i – вид ресурсов;

m – число видов ресурсов;

b_i – количество имеющихся ресурсов;

a_{ij} – нормативный коэффициент затрат ресурсов i на выпуск продукции с использованием технологического способа производства j ;

c_j – прибыль от выпуска единицы продукции, полученной с использованием технологического способа производства j ;

x_j – количество продукции, получаемой по технологическому способу производства j .

Математическая модель. Используя имеющиеся ресурсы, количество которых ограничено, найти оптимальные значения x_j

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.1)$$

позволяющие получить максимальную прибыль

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (4.2)$$

при условии не отрицательности переменных

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.3)$$

§ 4.1. Методы линейного моделирования

В матричной форме модель распределения лимитированных ресурсов наглядно представлена на рис.4.1. На этом рисунке показаны основные конструктивные элементы экономико-математической

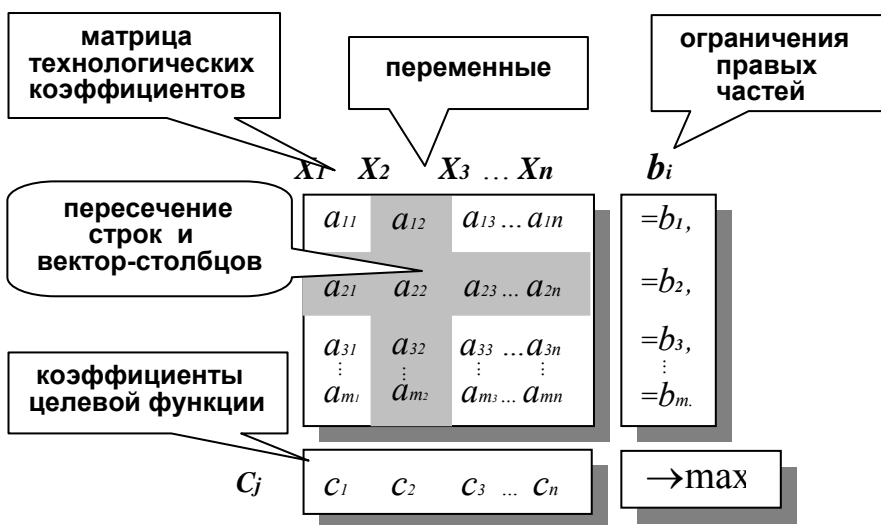


Рис. 4.1. Матрица модели распределения ресурсов

модели: матрица технологических коэффициентов, переменные, ограничения правых частей, коэффициенты целевой функции.

Постулаты линейного программирования

Для построения экономико-математической модели в соответствии с требованиями линейного программирования требуется принять ряд необходимых допущений. Основой построения такого рода модели является рассмотрение производственного процесса как совокупности нескольких элементарных функций, называемых *технологическими способами*. Технологический способ, при

этом, мыслится как своего рода *черный ящик*, для которого на вход подаются материальные ресурсы (сырье, материалы, рабочая сила), а выходом оказываются продукты промышленного производства.

Примем следующие три допущения, играющие очень важную роль при построении моделей линейного программирования:

□ **пропорциональность (делимость)**. Для формализуемого в модели процесса производства объем выпускаемой продукции пропорционален количеству потребляемых ресурсов. Другими словами, объем выпуска продукции и количество потребляемых ресурсов могут быть при необходимости увеличены или уменьшены при сохранении их взаимной пропорциональности. Так, например, если объем выпускаемой продукции увеличится вдвое, то количество потребляемых ресурсов, также возрастет в два раза. В частности, чтобы сшить вдвое больше костюмов, необходимо взять в два раза больше ткани.

□ **аддитивность**. Для распределяемых производственных ресурсов совокупность технологических способов является полной в том смысле, что полный расчет ресурсов может быть сделан по каждому из способов. Точнее говоря, общий объем любого из распределяемых между производственными способами ресурсов равен сумме их количества, поступивших в процесс производства, за минусом суммы их количества, выходящих из него. Таким образом, для формализуемой модели производственного процесса каждый из используемых ресурсов характеризуется уровнем материального баланса затрат и выпуска. В примере с шитьем костюмов, их количество, отправляемое на склад готовой продукции, должно быть полностью сбалансировано с количеством костюмов, которые изготавливаются по потокам.

□ **неотрицательность**. В то время как в моделируемых процессах промышленного производства допускается выпуск любого положительного числа продукции, какое-либо их отрицательное количество в принципе исключается. Так, например, невозможно сшить “минус” два костюма. Количество изготавливаемых костюмов может быть только числом положительным, так как в противном случае решение не будет иметь смысла. Это характерное свойство

переменных моделей линейного программирования известно как условие неотрицательности.

Постулирование свойств пропорциональности и аддитивности эквивалентно утверждению о том, что соответствующая модель может быть представлена в виде линейных соотношений. В более точной интерпретации сформулированные выше аксиомы означают, что применительно к моделируемому технологическому процессу доходы прямо пропорциональны затратам ресурсов на производство, а непропорциональный эффект (технологического или экономического характера) оказывается невозможным. В реальной ситуации сформулированные выше постулаты, позволяющие использовать линейные модели, могут оказаться справедливыми лишь приближенно (хотя, возможно, и с достаточной степенью точности). Предполагается, что для всех рассматриваемых моделей промышленного производства условия постулирования в целом будут выполнимы.

Этапы формализации линейной модели

Процесс построения линейной модели часто оказывается более сложным, чем кажется первоначально ввиду богатства разнообразия и неопределенности реальной действительности. Тем не менее, можно сформулировать некоторые принципы, определяющие последовательность этапов в процессе построения модели. При этом, можно выделить следующие пять основных этапов.

- *Определить множество технологических процессов.* Разложить изучаемый процесс производства на элементарные функции, технологические способы производства и выбрать единицу, которой можно измерить количество выпускаемой продукции.
- *Определить число ингредиентов.* Исходя из технологических особенностей процесса производства, потребляемых ресурсов и получаемой продукции, определить виды ингредиентов потребляемых или производимых технологическими способами. Выбрать единицу измерения каждого из них.
- *Определить коэффициенты затрат — выпуска.* Определить количество каждого ингредиента, затрачиваемое на производство единицы продукции с использованием того или иного технологичес-

кого способа. Эти числовые величины, коэффициенты затрат – выпуска, представляют собой коэффициенты пропорциональности, связывающие потоки потребления ресурсов и получения продукции в процессе производства.

- *Определить экзогенные потоки.* Определить потоки потребляемых ресурсов, рассматривая моделируемый объект в единстве с внешней средой.

- *Составить уравнения материального баланса.* Для каждого из потребляемых ингредиентов строится *уравнение материального баланса*, показывающее, что алгебраическая сумма расходов этого ингредиента по каждому из технологических способов (выраженная в виде произведения коэффициентов затрат – выпуска на соответствующее количество выпускаемой продукции) равна экзогенному потоку этого ингредиента.

- *Выбор критерия оптимальности.* Для каждой конкретной задачи требуется всесторонний и глубокий качественный анализ существа каждой задачи, которая должна быть достигнута в ходе решения. Выбор должен отвечать цели задачи.

Таким образом, в результате построения модели получают совокупность математических соотношений, описывающих все допустимые варианты производства продукции. Эта совокупность и есть *модель линейного программирования*.

Краткое повторение

■ **Пропорциональность** – одно из основных допущений построения линейных моделей, предполагающее существование пропорциональных зависимостей между количеством потребляемых ресурсов и объемами выпуска продукции.

■ **Аддитивность** – одно из допущений линейного программирования относительно баланса объе-

мов распределяемых между технологическими способами ресурсов, равно сумме их количеств поступивших в процесс производства, за минусом суммы их количества выходящих из него.

- **Неотрицательность** – одно из условий допускающее получение любого положительного количества выпускаемой продукции, и в принципе исключающее ее какое-либо отрицательное число.

§ 4.2. Приемы линейного моделирования

Конструктивные элементы моделей

Несмотря на некоторые различия в построении моделей, что прежде всего обусловлено разностью решаемых экономических задач, они в целом достаточно схожи. Это, в первую очередь, касается конструктивных элементов построения моделей. К числу таких конструктивных элементов относятся: матрица технологических коэффициентов, ограничения правых частей и целевая функция. Рассмотрим более детально, как формируется матрицы технологических коэффициентов экономико-математических моделей задач решаемых с помощью методов линейного программирования.

Построение матрицы технологических коэффициентов начинается с определения технологических способов, представляемых в матрице модели в виде вектор-столбцов, и условий ограничения ресурсов записываемых как отдельные строки. Их число определяет размерность матрицы модели. При этом коэффициенты a_{ij} записываются на пересечении строк и столбцов матрицы. Эти элементы матрицы

модели несут числовую экономическую информацию. Их принято называть *технико-экономическими коэффициентами*. Различают нормативные коэффициенты, связанные с технико-экономической характеристикой переменных величин, коэффициенты пропорциональности и коэффициенты связи.

Нормативные коэффициенты по своему содержанию подразделяются на коэффициенты затрат и выпуска продукции. Нормативные коэффициенты затрат указывают, какое количество ресурсов вида i затрачивается на производство единицы продукции. Нормативные коэффициенты затрат рассчитываются различными методами. Чаще всего они определяются с помощью технологических карт, или устанавливаются на основании фактических затрат, обработанных статистическими методами с определением производственных функций. Перечень этих затрат устанавливается в соответствии с условиями, оговоренными при постановке экономико-математической модели задачи. Размерность определяется в соответствии с соизмеримостью элементов матрицы. Нормативные коэффициенты выпуска продукции определяются в основном с использованием технологических карт, при определении производственных функций или при другой статистической обработке данных.

Все нормативные коэффициенты затрат и выпуска продукции могут быть представлены в прямом (физическом, натуральном) виде, а также как произвольные величины. Например, расход клея на производство обуви можно выразить и в физическом весе, и в произвольных величинах (по содержанию отдельных компонент).

Расчет нормативных коэффициентов – это очень важная часть процесса построения модели, так как от их достоверности этих коэффициентов зависит правильность решения задачи.

Коэффициенты пропорциональности вводятся в матрицу для используемых в модели дополнительных и вспомогательных ограничений. При описании дополнительных условий, когда выпуск одного вида продукции пропорционален выпуску другого. Записать, эти условия в соответствующих ограничениях можно только при помощи коэффициентов пропорциональности.

Коэффициенты связи обозначают связь между получаемым значением переменной величины и объемом ограничения. Их рассчитывают с учетом правил по установлению размерности для

технологических коэффициентов. В большинстве случаев они равны единице.

Переменные величины вводимые в матрицу модели, классифицируют с учетом их роли и интерпретации результатов полученных решений. Они в свою очередь, делятся на основные, вспомогательные и дополнительные.

Основные переменные определяют количество продукции, которое должно быть получено с использованием альтернативных технологических способов производства (например, одежда, обувь, галантерейные изделия).

Дополнительные переменные (искусственные) – это переменные, которые вводятся в модель с целью приведения ее к каноническому виду. Искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи (отсюда и их название “искусственные”). Вместе с тем без оценки их значений невозможно до конца проанализировать результаты полученных расчетов. При этом следует учитывать тип ограничения. Искусственные переменные могут показывать как количество неиспользуемых ресурсов, так и объем продукции, которая может быть получена сверх плана. В ряде случаев они показывают разность между максимально возможным объемом выпуска и выпуском по оптимальному плану.

Вспомогательные переменные вводят в модель для облегчения формализации условий. Эти переменные определяют аккумулируемые числовые значения объемов выпуска продукции и потребления ресурсов. Как правило, они не имеют какого-либо определенного экономического толкования.

Вспомогательные переменные, выражающие виды и способы деятельности, могут быть одно-, двух- и многокомпонентными в зависимости от того, с каким количеством ограничений они связаны. Большинство переменных являются двух- и многокомпонентными. Однокомпонентные переменные связаны только с одним ограничением и целевой функцией.

Важное место при построении экономико-математической модели задачи имеет перечень и размерности числовых величин переменных. В каждом конкретном случае они определяются в зависимости от целей моделирования. Перечень может содержать переменные

величины, выражающие однотипные или разнотипные экономические показатели. Как правило, определенные экономико-математические задачи содержат в основном одинаковый перечень переменных величин, что значительно облегчает их составление.

В соответствии с опытом моделирования в настоящее время разработан целый ряд правил, которым необходимо следовать при определении размерности переменных величин:

- для упрощения процедуры предварительных расчетов для однотипных видов продукции необходимо избирать одинаковую размерность. Например, для швейного производства расход ткани измеряется в м², в обувном производстве расход кожи следует измерять в дм² и т. д.;

- по возможности необходимо избирать такую размерность, чтобы технико-экономические коэффициенты, характеризующие данную переменную величину, не были слишком малы (дробны) или слишком велики (громоздки);

- выбранная размерность не должна затруднять анализ решения и требовать значительных дополнительных расчетов для определения плановых показателей;

- если имеются нормативные данные, которые могут быть использованы как технико-экономические коэффициенты, то размерность переменной величины следует избрать такую, по которой устанавливались нормативы.

После того как были установлены альтернативные технологические способы, определяют ограничения экономико-математической модели задачи. Нахождение приемлемых с точки зрения предприятий оптимальных решений зависит прежде всего от правильного определения состава ограничений. В них отражаются важнейшие условия и требования организации и управления производством. Ограничения формулируют в виде системы уравнений и неравенств, выражающей возможности производства и баланса ресурсов. В этой связи особую значимость приобретает полнота и точность отражения в модели всех ограничений, накладываемых на переменные. При

формулировании ограничений необходимо, чтобы все условия задачи были по возможности представлены в модели. Количество ограничений должно соответствовать необходимой степени сложности модели. Оно не может быть излишне большим или слишком маленьким.

Ограничения ресурсов могут налагаться на все переменные, какую-либо их часть или отдельные величины. В состав ограничений могут входить три типа известных соотношений (больше или равно (\geq), равно ($=$), меньше или равно (\leq)). По своему характеру ограничения делятся на основные, дополнительные и вспомогательные.

К *основным* относятся такие ограничения, которые накладываются на все или большинство переменных линейной функции. Они выражают основные технико-экономические условия задачи. В промышленном производстве к ним относятся ограничения на лимитированные ресурсы: финансовые средства, материалы, станки и технологическое оборудование, рабочую силу, топливо, воду электрическую энергию. Из всех используемых ресурсов в расчет берутся только те, использование которых ограничено их определенным объемом.

Дополнительные ограничения накладываются на отдельные переменные или на их небольшие группы. Обычно они формулируются в виде неравенств, ограничивающих “снизу” или “сверху” объемы производства отдельных видов продукции, использования остро дефицитных ресурсов. С их помощью связываются также отдельные блоки модели, представляющие собой как бы ряд частных задач в единой общей задаче. Например, задача оптимизации ассортимента выпускаемой продукции, где в качестве блоков выступают отдельные цеха предприятия.

Вводить дополнительные ограничения следует умело. Особенно очень важно не перенасытить ими модель, не сократив степеней свободы выбора, в противном случае решение задачи сведется к арифметическому вычислению заранее предreshенного результата.

Вспомогательные ограничения не имеют самостоятельного экономического значения. Их используют главным образом для обеспечения правильной формулировки экономических требований и математической записи системы линейных ограничений.

Размерность каждого ограничения i определяется единицами

измерения его правой части b_i . К примеру, b_i означает фонд рабочего времени в человеко-часах. Следовательно, размерность ограничений по трудоемкости будет также в человеко-часах.

Размерность любого коэффициента a_{ij} ограничения i должна быть равна размерности, принятой для этого ограничения (размерность b_i), деленной на величину переменной x_j .

Важное место в формализации экономико-математической модели занимает *целевая функция*, экстремальное значение которой характеризует предельно достижимую эффективность моделируемого объекта. Найдя экстремум целевой функции, определив значения искомым переменных которые к нему приводят, находят оптимальное решение задачи. Коэффициенты целевой функции c_j наиболее тесным образом связаны с целевой установкой решения задачи и соответствующим *критерием оптимальности*.

Критерий оптимальности определяет целевую направленность в решении экономической проблемы. Численное его значение находится как сумма произведений коэффициентов целевой функции умноженных на значения переменных, определяемых в ходе решения задачи.

В этой связи экономическое содержание коэффициентов целевой функции должно обеспечить соответствие критерию оптимальности. Но это не значит, что содержание коэффициентов целевой функции и содержание целевой установки обязательно должны совпадать. Так, например, показателем эффективности работы предприятия может быть как максимальная величина получаемой прибыли, так и минимальные затраты. Если в одном случае коэффициентами целевой функции будет прибыль, получаемая от производства единицы продукции, то во втором – затраты.

В практике экономико-математического моделирования критерий оптимальности не может и не должен носить жесткого однозначного характера. Для решения такого рода задач требуется их формализация, которая неизбежно связана с экспертными оценками как самих критериев, так и взаимоотношений между ними (одни критерии противоречат другим, другие наоборот, действуют в одном направлении, третьи – индифферентны, безразличны друг к другу). В этой связи возникает необходимость построения многокритериальных задач. Построение и решение оптимизационных задач в многокритериальной форме одно из наиболее перспективных направлений развития экономико-математического моделирования.

**Приемы
построения
моделей**

Рассмотрим наиболее употребляемые приемы, используемые в экономико-математическом моделировании. Они могут быть условно разделены на два типа: которые применяются при формализации матрицы модели и которые применяются для ограничений правых частей. Как в первом, так и во втором случае они представляют собой дополнительно вводимые ограничения, которые могут накладываться на отдельные переменные или имеющиеся ресурсы.

При построении матрицы технологических коэффициентов очень часто прибегают к таким приемам, как введение *отраженной переменной* и *коэффициентов пропорциональности*.

Для решения ряда экономических задач нередко требуется определить суммарную величину выпускаемой продукции, которая пока еще сама неизвестна. Допустим, необходимо определить уровень выпуска продукции для всех цехов предприятия. В таких и подобных им случаях прибегают к приему моделирования, который называется *отраженной переменной*.

Этот прием основан на линейном соотношении переменных. Если в соотношении $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ константу b_i заменить вспомогательной переменной x и перенести ее в левую часть уравнения, то получим:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - \bar{x} = 0,$$

где \bar{x} всегда будет равно сумме произведений нормативных коэффициентов, умноженных на полученные неотрицательные значения переменных величин.

При моделировании процессов выпуска продукции в промышленном производстве нередко необходимо обеспечить требуемые пропорции, в соотношениях между значениями двух (нескольких) переменных. В этих случаях для записи условий задачи пользуются приемом введения в матрицу модели вспомогательных ограничений пропорциональной связи, получивших название *коэффициентов пропорциональности*. Рассмотрим использование этого приема на конкретном примере. Известно, что величина расхода материалов на производство продукции не должна превышать 500 т. Ограничение

пропорциональности связей гарантирует выполнение условий в соотношениях расхода материала:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 500.$$

Следующий пример. В плане производства обуви оговаривается, что поток должен выпустить не менее 1000 пар. Из них сапоги составят – 20 %, полуботинки – 30 %, туфли – 40 % и комнатные тапочки – 10 %. Это условие записывается в виде следующего уравнения пропорциональной связи. Но для его записи необходимо найти коэффициенты пропорциональности. Они определяются следующим образом. Разделив все количество выпускаемой обуви – 1000 пар на количество выпускаемых сапог – 200 пар, получим коэффициент 5. Для полуботинок, туфель и комнатных тапочек этот коэффициент будет равен соответственно: 3,33; 2,50 и 10. При этом, уравнение пропорциональности будет иметь такой вид:

$$5x_1 + 3,33x_2 + 2,50x_3 + 10x_4 = 1000.$$

Для математической формулировки технико-экономических условий, требующих изменения объемов ограничений ресурсов (величины b_i) при неизменных коэффициентах переменных величин, пользуются двумя приемами: *установления диапазона изменений* и *введения дополнительной переменной*.

Использование такого приема как ***установления диапазона изменений*** ограничений ставит своей целью определение границ изменения величины лимитированных ресурсов b_i . Это условие записывается при помощи двух линейных соотношений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq \alpha_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq \beta_2. \end{aligned}$$

При решении подобная формулировка обеспечивает изменение величины b_i в пределах $\alpha_1 \leq b_i \leq \beta_2$, где α_1 – нижняя допустимая граница изменения величины b_i , а β_2 – верхняя допустимая граница.

Допустим, при решении экономико-математической задачи нужно учесть, что объемы заготовок кожевенного сырья, постав-

§ 4.2. Приемы линейного моделирования

ляемого для производства кожи, могут изменяться в пределах от 150 000 до 220 000 шт. Это условие можно записать так:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq 150\,000; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq 220\,000. \end{aligned}$$

Однако этот прием применим лишь тогда, когда можно установить величины α_i и β_i . Значения α_i и β_i могут зависеть от других условий, которые учитывают при разработке модели предприятия, но величина которых точно не известна. Величина b_i при этом, может изменяться в очень широких пределах. Для таких случаев может быть применен другой, более универсальный метод.

Введение дополнительной переменной. Это один из приемов приведения модели к каноническому виду. Дополнительная (искусственная) переменная показывает, насколько может быть увеличено (уменьшено) значение величины b_i , что дает возможность в случае необходимости скорректировать ее значение. При этом формализованная запись условий принимает следующий вид:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \pm s_i = b_i,$$

где s_i – дополнительная переменная, знак ее (\pm) определяется типом неравенства (\leq, \geq). Экономический смысл записи – объем потребляемых ресурсов, который может быть частично не использован (при неравенстве типа \leq), или выпуск продукции, который превышает заданный объем (неравенство типа \geq). В случае если объем выпуска продукции ограничен (неравенство типа \leq), то дополнительная переменная показывает разность между величиной максимально возможного выпуска b_i и выпуском по оптимальному плану $b_i - s_i$.

Проиллюстрируем применение этого приема с помощью примера. Для производства швейных изделий предприятию требуется 100 000 м² ткани. В математической записи это выглядит так:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + s_1 = 100\,000.$$

Результаты расчетов показали, что значение дополнительной введенной переменной s_i равно 1000. С практической точки зрения

это означает, что из $100\,000\text{ м}^2$ ткани, которые первоначально запланированы для производства швейных изделий, 1000 м^2 будет сэкономлено. Таким образом, количество расходуемой ткани в условии нашей задачи может быть сокращено до $99\,000\text{ м}^2$.

Другой пример. Обувной фабрикой запланирован выпуск не менее $16\,000$ пар моделей женских туфель. В формализованном виде это условие записывается так:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - s_1 = 16000.$$

В результате расчетов было получено, что значение дополнительной переменной равняется 210 . Это означает, что в соответствии с оптимальным планом выпуска обуви будет дополнительно получено 210 пар женских туфель. В целом же выпуск составит $16\,210$ пар.

Еще один пример. Количество пар комнатных тапочек, которое планируется выпустить на обувной фабрике, не должно превышать $11\,000$ пар. В математической записи это выглядит так:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + s_1 = 11000.$$

Полученные результаты показали, что значение введение дополнительной переменной s_1 равняется 520 . В экономическом плане это число составляет разностью между величиной максимально допустимого выпуска $11\,000$ пар и выпуска по оптимальному плану $10\,480$ пар.

Краткое повторение

- **Введение отраженной переменной** – прием моделирования, позволяющий суммировать произведения технологических коэффициентов, умноженных на значения этих переменных.
- **Задание коэффициентов пропорциональности** – один из приемов моделирования обеспечивающий

соблюдение требуемых соотношений между искомыми переменными.

- ❑ **Установления диапазона изменения ограничений** – прием, для установления границ изменения ограничений лимитированных ресурсов.
- ❑ **Введение дополнительной переменной** – прием приведения модели к каноническому виду. Эта переменная показывает, на сколько может быть увеличено (уменьшено) значение ограничений, что дает возможность корректировать величину лимитированных ресурсов.

§ 4.3. Построение блочной модели

Блочная оптимизационная модель

Для решения сложных задач линейного программирования, матрицы которых большой размерности, используются специальные методы разложения моделей, на отдельные блоки. Большая модель с крупноразмерной матрицей (включающая множество вектор-столбцов и ограничений) разбивается на блоки и сводится к нескольким моделям с матрицами меньшей размерности. Блочная матрица, при этом представляет собой матрицу, разбиваемую вертикальными и горизонтальными линиями на отдельные блоки, которые рассматриваются как ее отдельные элементы. Необходимость такого подхода обусловлена тем, что с увеличением размерности модели сложность решения задачи растет неизмеримо быстрее.

Широкое применение методов блочного моделирования для решения оптимизационных задач получило в задачах, где естественно разложение, “*декомпозиция*” общей модели отрасли либо на блоки –

модели предприятий, либо на блоки, соответствующие последовательным стадиям переработки сырья (технологические переделы).

Среди методов декомпозиции наиболее известны два: метод декомпозиции *Данцига–Вульфа* и метод планирования на двух уровнях *Корнаи–Липтака*. Оба они представляют собой последовательные (итеративные) пересчеты, взаимноувязанных решений главной “отраслевой” задачи и локальных задач предприятий. Различие же между ними состоит в том, что в первом случае итеративный процесс основан на корректировке *двойственных оценок* ресурсов и продукции (такая корректировка делает для предприятия выгодными планы, все более приближающимся к оптимальному плану отрасли), а во втором случае – на корректировку лимитов общепромышленных ресурсов, выделенных предприятиям.

Иначе говоря, схема *Данцига–Вульфа* строится по принципу “централизованное установление цен – децентрализованное определение наилучших возможностей”, а схема *Корнаи–Липтака* – по принципу “централизованное лимитирование потенциальных возможностей – децентрализованное выявление эффекта от их использования”. В каждом из случаев важную роль играют *двойственные оценки*, причем их оптимальный уровень выявляется вместе с оптимальным распределением ресурсов.

Блочная схема матрицы модели

Блочное построение матрицы модели большой размерности предполагает наличие в ее структуре блоков числовых коэффициентов расположенных по главной диагонали (рис. 4.2). Каждый из этих блоков, является блоком числовых коэффициентов матриц моделей, объединенных в единую матрицу модели совместно решаемой задачи. Матрица модели имеет блочно-диагональный вид. При этом наряду с ограничениями отдельных блоков, каждый из которых содержит только определенную часть ограничений, не входящих в другие блоки, она также содержит и связующий блок переменных с общими ограничениями. Связующий блок с общими уравнениями-ограничениями называют *блоком-связкой*, или просто *связкой*, так как именно эти уравнения связывают между собой переменные различных диагональных блоков. Ели бы не было *блока-связки*, то задача очевидным образом распалась бы на несколько (по числу диагональных

§ 4.3. Построение блочной модели

блоков) самостоятельных, независимых между собой подзадач, определенных отдельными блоками и соответствующими слагаемыми целевой функции. Решив эти отдельные задачи, мы тем самым решили бы и исходную задачу: ее оптимальное решение составилось бы из оптимальных решений подзадач, а оптимум равнялся бы сумме их оптимумов.



Рис. 4.2. Схема блочной матрицы модели

При наличии блока-связки так поступать нет смысла. Задачи, определяемые отдельными диагональными блоками, теперь нельзя рассматривать как самостоятельные, так как переменные, входящие в них, подчинены еще общим ограничениям. Однако естественно

стремится все же как-то использовать особенности задачи и свести решение исходной большой задачи к решению последовательности подзадач, определяемых связанными между собой *блоками*.

**Двухуровневая
оптимизационная
модель**

В настоящее время одним из самых разработанных и распространенных методов декомпозиции моделей, является метод построения модели на двух уровнях.

Рассмотрим более подробно проблему постановки задачи и согласования решения с помощью декомпозиционной схемы разложения матрицы модели *Корнаи-Липтака*. Предположим, что моделируемая экономическая система состоит из ряда l подсистем $l = (\overline{1, L})$. Глобальную модель определим как задачу с заданным критерием оптимальности, описывающим общесистемные интересы, и ограничениями из заданных условий производства. Локальные задачи для каждой из моделируемых подсистем определяется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n_j} a_{ij}^l \xi_j^l \leq x_i^l, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.4)$$

$$\xi_j^l \geq 0, \quad j = \overline{1, n_j}; \quad (4.5)$$

$$c^l(\xi^l) = \sum_{j=1}^{n_j} c_j^l \xi_j^l \rightarrow \max. \quad (4.6)$$

Глобальная модель верхнего уровня такова:

$$\sum_{l=1}^L x_i^l \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.7)$$

$$x_i^l \geq 0, \quad l = \overline{1, L}; \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.8)$$

$$\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^m q_i^l x_i^l \rightarrow \max. \quad (4.9)$$

Согласование решений по системе моделей (4.4) – (4.9), в общих чертах осуществляется так: сначала каждой подсистеме выделяется

некоторый объем ресурсов x_i^l , где $i = \overline{1, m}$. После этого решаются локальные задачи (4.4) – (4.6). Двойственные оценки соответствующих ограничений этих задач характеризуют эффективность данного варианта распределения ресурсов. Получив эти оценки, необходимо произвести корректировку распределения ресурсов, для чего решается задача верхнего уровня (4.7) – (4.9). Как видно задача (4.7) – (4.9) распадается на m (где m – число видов общих ресурсов) не связанных между собой задач распределения ресурса i ($i = \overline{1, m}$), в каждом из которых есть единственное связывающее ограничение. Решение такой задачи имеет довольно простой экономический смысл и состоит в том, что весь запас имеющихся ресурсов выделяется той подсистеме, для которой оценка эффективности использования этого ресурса q_i^l максимальна. Если же несколько подсистем используют данный ресурс с равной эффективностью, то его можно выделить любой из них.

Применение декомпозиционных схем основано на ряде исходных посылок. В частности для рассматриваемой системы, в которой реализуется согласование решений разных уровней, признается наличие заранее заданной общей глобальной модели, описывающей функционирование системы в целом. Задачи верхнего и нижнего уровней отыскиваются из заранее сформулированной глобальной модели с последующей увязкой иерархических решений до получения глобального решения. Тем самым, задачи верхнего и нижнего уровней оказываются, как бы выделенными из глобальной задачи: ограничения этих задач являются частью ограничений исходной задачи, а целевые функции выводятся из ее целевой функции. Часто эти задачи интерпретируются как задачи, решаемые центральным управляющим органом и локальными хозяйственными объектами. При этом иерархия органов управления полностью совпадает с реальной иерархией моделируемой производственной системы: органы управления строго соответствуют объектам управления, причем их функции четко определены и исключают дублирование. При таком подходе механизм взаимодействия систем, принимающих решения, т.е. способ координации центральным органом управления локальных подсистем, количество и состав информации, которая обменивается между различными уровнями, полностью определяется решаемой глобальной задачей.

Краткое повторение

- ❑ **Блочная матрица** – матрица модели, разбитая вертикальными и горизонтальными линиями на отдельные блоки, которые являются матрицами меньшей размерности и рассматриваются как ее отдельные элементы.
- ❑ **Двухуровневая модель** – оптимизационная модель, решаемая на глобальном и локальном уровнях, при очень тесной координации результатов расчетов, полученных на всех моделируемых уровнях.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

блочная матрица	ограничения правых частей
вспомогательная переменная	основные ограничения
вспомогательное ограничение	основные переменные
двухуровневая модель	отраженная переменная
дополнительная переменная	постулат аддитивности
дополнительное ограничение	постулат неотрицательности
коэффициент пропорциональности	постулат о пропорциональности
коэффициент связи	технологические коэффициенты
критерий оптимальности	технологический способ
нормативные коэффициенты	целевая функция

**Контрольные вопросы
и задания**



1. Особенность моделей линейного программирования.
2. Основные допущения линейного программирования.
3. Постулат о пропорциональности.
4. Постулат об аддитивности.
5. Постулат о неотрицательности.
6. Этапы формализации модели.
7. Конструктивные элементы построения моделей.
8. Приемы построения моделей.
9. Введение отраженной переменной.
10. Задание коэффициентов пропорциональности.
11. Введение дополнительной переменной.
12. Блочная оптимизационная модель.
13. Блочная схема матрицы модели.
14. Двухуровневая оптимизационная модель.



Часть III

Решение оптимизационных задач и анализ полученных результатов

✓ Тема 5. *Решение оптимизационных задач*

§ 5.1. Решение задач на компьютере

§ 5.2. Интерфейс с пользователем

§ 5.3. Нахождение оптимального решения

✓ Тема 6. *Анализ результатов расчетов*

§ 6.1. Постоптимизационный анализ

§ 6.2. Анализ чувствительности модели

§ 6.3. Чувствительность двойственной модели

Глава

5

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В этой главе показаны возможности использования специальных пакетов прикладных программ для решения оптимизационных задач. Приведен интерфейс с пользователем. Рассмотрено нахождение оптимального решения на компьютере и корректирование результатов расчетов.

§ 5.1. Решение задач на компьютере

Возможности использования пакета программ

Решение задач экономико-математического моделирования на компьютере невозможно без использования специальных пакетов прикладных программ. В настоящее время, для решения задач линейного программирования наиболее широкое применение получили интегрированные пакеты программ EXCEL, MAPLE, MATLAB и др. В отличие от них, пакет линейного программирования PLP-2000 for Windows специально предназначен для решения такого типа оптимизационных задач. Этот пакет, реализует усовершенствованную версию алгоритма модифицированного симплекс-метода с мультипликативной формой представления обратной матрицы. Основной особенностью данного метода является разбиение процесса итерационных вычислений на две отдельные фазы: введения искусственных переменных и нахождения базисного решения; использования двойственных оценок для выбора входящих в базис переменных.

Пакет PLP-2000 дает возможность получать решения не только оптимизационных задач, но также частично-целочисленных и транспортных задач. Он позволяет формулировать и решать задачи линейного программирования, содержащие до 510 ограничений и

2510 переменных с плотностью заполнения матрицы модели до 10 %. При решении частично-целочисленных задач линейного программирования имеющих 64 целых переменных, матрица модели может содержать до 255 ограничений и 1255 переменных. Решаемые с помощью этого пакета транспортные задачи, могут содержать до 510 пунктов отправления, потребления и промежуточных пунктов.

Запуск пакета прикладных программ

Приступая к решению задачи на компьютере запустите приложение PLP-2000. Для этого, взгляните на *Рабочий стол*, и если там присутствует *ярлык* PLP-2000, двойной щелчок левой клавиши мышки запустит приложение.

Если *ярлыка* PLP-2000 нет, перетащите его на *Рабочий стол*. Если обнаружить *ярлыка* не удалось, попробуйте найти приложение на каком-либо диске средствами поиска: возможно, ярлык приложения был удален из Главного меню – именно оно раскрывается при щелчке на кнопке Пуск, – а на Рабочем столе и Панели быстрого запуска не создан. Выберите команду Пуск ►Найти ►Файлы и папки введите в поле поиска файла или папки имя файла исполняемой программы PLP-2000.EXE. Щелкните на кнопке Найти или нажмите клавишу Enter – результат поиска предоставит необходимую информацию. Если *значок* PLP-2000 найден, дважды щелкните на нем в этом окне. Запущенное приложение дает ответ на вопрос, установлено ли то, что нужно, но не наверняка, само по себе присутствие исполняемой программы PLP.EXE не дает гарантии правильной работы приложения. В случае необходимости переустановите приложение.

Итак, убедившись в том, что пакет прикладных программ PLP-2000 установлен, а если в процессе работы столкнемся с некорректной его работой, то уже знаем, как переустановить это приложение. Дело в том, что понятие “пакет прикладных программ”, или “приложение”, вообще-то не исчерпывается *исполняемой программой*: необходимо наличие всевозможных вспомогательных файлов и записей о взаимодействии с ними в системе Windows.

Практика показывает, что замена приложения путем модернизации, а не удаления старой версии новой не всегда безопасна. Если старая версия не содержит ценной информации то ее можно удалить. Еще осторожнее надо относиться к переустановке операционной

§ 5.1. Решение задач на компьютере

системы. Если это случилось, не исключено, что какие-то приложения придется переустанавливать: изменение состояния взаимодействующих компонент не всегда происходит корректно.

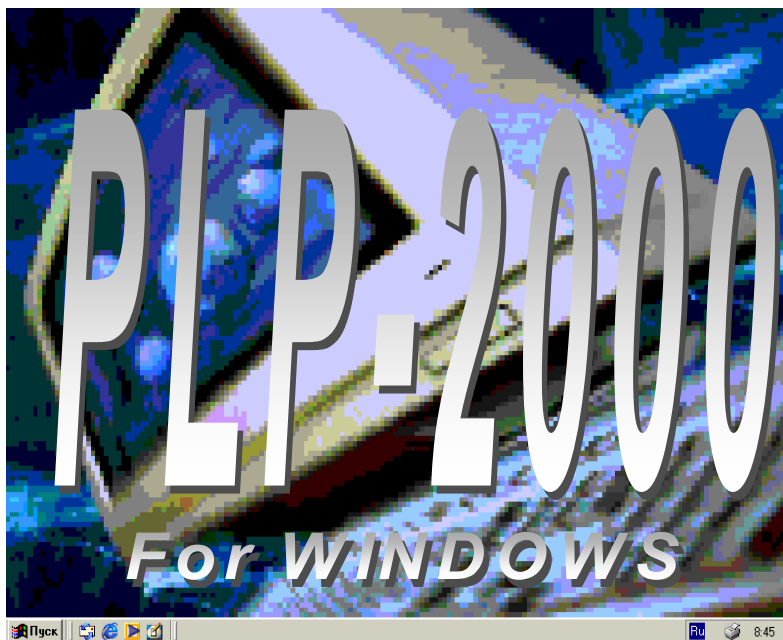


Рис. 5.1. Стартовая заставка пакета PLP-2000

Для запуска приложения необходимо двойным щелчком на ярлыке на Рабочем столе, щелкнуть на ярлыке Панели быстрого запуска или щелчком на найденном значке исполняемой программы в окне поиска.

Работа с пакетом прикладных программ

После запуска приложения на экране монитора компьютера появляется стартовая заставка пакета линейного программирования PLP-2000 (рис.5.1.). Вслед за этой заставкой, после короткой паузы, на экране монитора появляется меню выбора численного алгоритма решения оптимиза-

ционной задачи. В качестве одного из выбираемых алгоритмов численного метода при этом могут выступать: алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования, частично-целочисленной задачи и транспортной задачи. Пиктограммы выбора

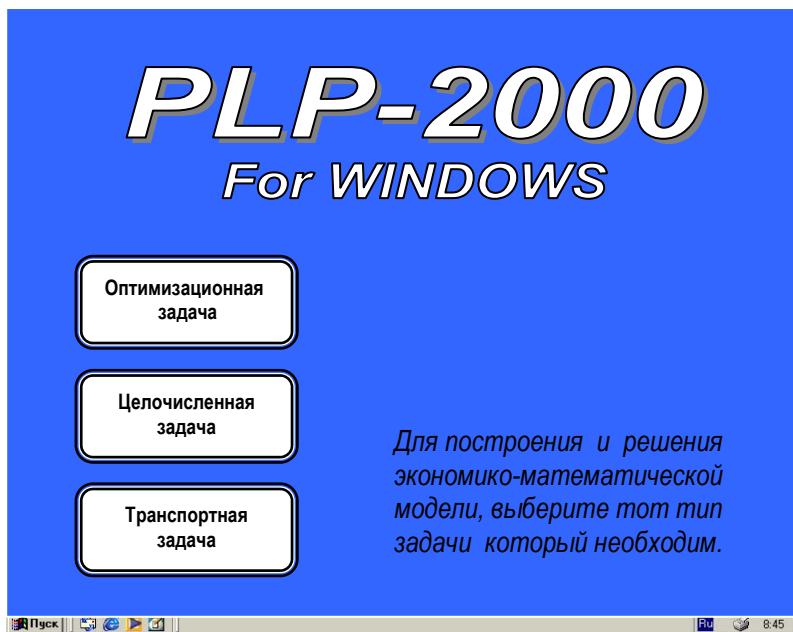


Рис. 5.2. Выбор типа решаемых задач пакета PLP-2000

численного метода решения оптимизационных задач расположены в левой нижней части заставки экрана. Для выбора метода решения оптимизационной задачи, необходимо щелкнуть клавишей мышки по пиктограмме одного из выбираемых методов (рис.5.2).

Вслед за этим, на экране монитора появится набор меню приложения. Если окно *развернуто* (на полный размер экрана), то средняя кнопка в верхнем правом углу экрана будет выглядеть как два пересекающихся квадрата. Если окно *свернуто*, то средняя кнопка в верхнем правом углу экрана будет выглядеть как нижняя черточка.

§ 5.1. Решение задач на компьютере

Кнопка с крестиком – это кнопка *закрытия* окна. Щелчок по этой кнопке *закроет* соответственно документ или приложение. Работа пакета (рис. 5.3) осуществляется под управлением четырех меню:

MASTER MENU
SETUP MENU
EXECUTION MENU
OUTPUT MENU

Каждое меню управляет одним из больших этапов решения задачи.

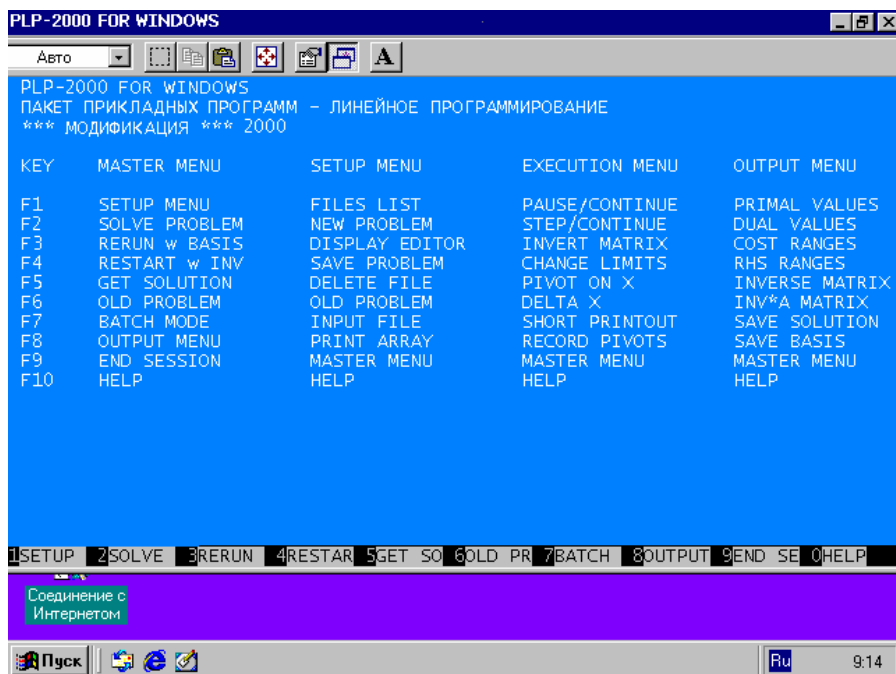


Рис. 5.3. Работа пакета PLP-2000 под управлением меню

Головное – (MASTER MENU) управляет выбором других меню, инициализацией симплекс алгоритма или метода ветвей и границ, поиском проблемного файла старой задачи, запуском командного файла.

Меню установки (SETUP MENU) управляет вводом, редактированием, распечаткой, поиском и запоминанием задач.

Меню выполнения (EXECUTION MENU) доступно в процессе оптимизации и управления ходом вычисления.

Меню вывода (OUTPUT MENU) управляет формированием и выводом таблиц выходных данных и запоминанием текущего базиса в специальных файлах.

Элементы активного и текущего меню представлены на экране в последней строке. Для работы с активными элементами мышка не нужна. Управление всем процессом работы осуществляется с помощью нажатия функциональных клавиш (F1-F10), расположенных на клавиатуре. При необходимости, можно вывести на экран подсказку, нажав клавишу F10 (HELP). Возврат в головное меню можно осуществить в любое время нажатием клавиши F9 (MASTER MENU). Нажатие клавиши F9 (END SESSION) в головном меню вызывает запрос о подтверждении сеанса работы с пакетом. Учитывая то, что функциональных клавиш управления работой пакета десять, и они используются в четырех меню, поэтому, во избежание ошибок при работе с пакетом нужно следить за состоянием активных элементов.

Краткое повторение

- ❑ **Модифицированный симплекс-метод** – более совершенная версия алгоритма симплекс-метода с мультипликативной формой представления обратной матрицы. Его особенностью является разбиение процесса итерационных вычислений на две отдельные фазы: введение искусственных переменных и нахождение базисного решения; использование двойственных оценок для выбора входящих в базис переменных.
- ❑ **Меню пакета** – меню выбора предоставляемых пакетом линейного программирования возможностей решения оптимизационных задач.

§ 5.2. Интерфейс с пользователем

Работа с экранным редактором

Экранный редактор пакета PLP-2000, является эффективным инструментом для построения и редактирования матриц числовых коэффициентов экономико-математических моделей. В редакторе предусмотрена возможность фрагментирования матрицы большой размерности, ввода, вывода на экран и корректирования числовых моделей. На экран выводится фрагмент матрицы числовых коэффициентов, который включает 10 переменных и 15 ограничений исходной или уже созданной модели. При формировании исходной матрицы модели в (SETUP MENU) следует нажать клавишу F2 (NEW PROBLEM) и ответить на вопросы редактора:

ИМЯ НОВОЙ ЗАДАЧИ? optima
ЦЕЛЕВ.Ф-Я (MAX/ MIN)? MAX
КОЛИЧ-ВО ОГРАНИЧЕНИЙ? 5
КОЛИЧ-ВО ОСНОВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ? 4.

В случае, когда матрица модели уже была сформирована необходимо вызвать старую задачу, для чего в (SETUP MENU) следует нажать клавишу F6 (OLD PROBLEM) и ответить на вопрос редактора:

ИМЯ СТАРОЙ ЗАДАЧИ? optima.

Вызов редактора осуществляется через (SETUP MENU) клавишей F3 (DISPLAY EDITOR). Вызов отдельного фрагмента матрицы осуществляется заданием координаты матрицы (имя строки и имя столбца), которая будет являться началом фрагмента. По умолчанию принимаются координаты строки – (Y.1) и координаты столбца – (X.1).

По желанию пользователя можно использовать любые шести-символьные имена. Клавиша Page Up смещает фрагмент вверх на 15 строк и Page Down вниз на 15 строк. Смещение на 10 столбцов вправо и влево осуществляется нажатием клавиш Delete и Insert соответственно. Клавиша ENTER и перемещения курсора ←↑↓→ используются для передвижения по клеткам матрицы выведенного фрагмента.

Клавиши End и Home – передвигают курсор на конец и начало выведенного фрагмента.

Для удаления любого из векторов матрицы модели достаточно стереть его имя. Добавление новых векторов возможно только после последнего вектора. Для этого достаточно после последнего вектора матрицы задать новое имя вектора. Матрица модели будет расширена за счет нового вектора.

Для удаления любого из векторов матрицы модели достаточно стереть его имя. Добавление новых векторов возможно только после последнего вектора. Для этого достаточно после последнего вектора матрицы задать новое имя вектора. Матрица модели будет расширена за счет введения нового вектора. Новые целочисленные переменные добавлять нельзя.

Для ввода коэффициентов содержащих более 6 символов, существует специальный режим редактирования:

- нажатием клавиши SHIFT/TAB курсор переводится в строку 22 и высвечивается слово EDIT;

- через запятую можно ввести коэффициент с указанием координат (имен строк или столбцов) в строке EDIT можно указывать любые координаты коэффициентов, в т. ч. и не входящих в текущий фрагмент матрицы.

Формирование матрицы модели

Для трансформации матрицы модели в формат пакета линейного программирования PLP-2000 необходимо учесть некоторые особенности, связанные с компьютерным представлением решаемой задачи. В отличие от канонической формы записи матрицы модели, представления матрицы в формате пакета PLP-2000 не требует подробной записи произведений числовых коэффициентов и переменных. Переменные представляются в верхней части матрицы. В левой части матрицы представляются ограничения задачи. В матрицу вводятся только числовые коэффициенты. Если числовые коэффициенты положительные, то знак “+” не вводится. Если числовые коэффициенты отрицательные, то они вводятся со знаком “-”. В виду того, что знаки неравенства типа \geq и \leq на клавиатуре компьютера отсутствуют, то для их представления в формате пакета используются составные знаки из двух символов \Rightarrow и \Leftarrow . В отличии от канонической формы записи функции цели в

§ 5.2. Интерфейс с пользователем

нижней части матрицы целевая функция модели в формате пакета PLP-2000 для удобства записывается сверху. Это в случае необходимости во многом упрощает добавления и удаления строк матрицы.

Рассмотрим процедуру построения матрицы модели задачи в формате пакета PLP-2000 на контрольном примере:

$$\begin{aligned} 2.5 X.1 + 2.6 X.2 + 2.6 X.3 + 2.7 X.4 &\leq 2700, \\ 1.5 X.1 + 1.3 X.2 + 1.1 X.3 + 1.2 X.4 &\leq 1200, \\ 27 X.1 + 30 X.2 + 26 X.3 + 32 X.4 &\leq 32000, \\ 0.6 X.1 + 0.7 X.2 + 0.4 X.3 + 0.8 X.4 &\leq 800, \\ X.1 + X.2 + X.3 + X.4 &\geq 1000, \\ 16.3 X.1 + 17.2 X.2 + 15.1 X.3 + 18.4 X.4 &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Задав ранее размерность матрицы модели и вызвав экранный (DISPLAY EDITOR) нажатием клавиши F3 в (SETUP MENU), мы



Рис. 5.4. Матрица модели в формате пакета PLP-2000

формируем матрицу модели, которая представлена на рис. 5.4. В верхней части экрана приведено название программы, функция цели, количество переменных и ограничений, количество вводимых в модель фиктивных переменных, дата и время выполнения оптимизационных вычислений. В левом углу, в третьей строке выделена клеточка указывающая на то, что задача решается на максимум (MAX). В случае, если целевую функцию этой задачи необходимо решать не на максимум а на минимум, то вместо значения (MAX) на экране следует набрать значение (MIN). Имя целевой функции (RETURN) в строке ниже изменится на (COST). Вслед за значением целевой функции на экране следуют имена переменных (X.1 – X.4). Если необходимо добавить еще одну переменную, то в строке справа от переменной (X.4) необходимо набрать имя новой переменной. Если необходимо убрать какую-либо переменную, то ее имя в строке необходимо стереть. В правой части строки содержится название вектора ограничений (RHS). Увеличение и сокращение числа строк матрицы производится аналогично. В том случае, если необходимо добавить еще одну строку к тем, что уже имеются (Y.1 – Y.5), то после имени последней строки, следует добавить имя еще одной строки. Если необходимо убрать строку, сотрите имя этой строки в колонке имен.

Сохранение матрицы модели

В пакете PLP-2000 предусмотрена возможность сохранения матриц модели. Это особенно важно для задач, матрицы которых, имеют большую размерность и в случае потери файла, нужно будет потратить много времени на их полное восстановление. Сохранение матрицы модели дает возможность внесения необходимых изменений и дополнений для последующей корректировки задачи. Производится это путем нажатия клавиши F4 в (SETUP MENU), и записи матрицы задачи (SEVE PROBLEM) в отдельный файл раздела (МОИ_МОДЕЛИ). Файл может быть сохранен

ИМЯ ДЛЯ ЗАПОМИН. ЗАДАЧИ? ←
optima **ИМЯ ЗАПОМИНАЕМ КАК** optima (Y/N) ? Y

под тем же именем, как и имя задачи или под новым именем, отли-

§ 5.3. Нахождение оптимального решения

чающимся от прежнего имени задачи. Запрашивается имя файла для

ИМЯ ДЛЯ ЗАПОМИН. ЗАДАЧИ? matrix
optima **ИМЯ ЗАПОМИНАЕМ КАК** matrix (Y/N) ? Y

сохраняемой задачи и подтверждение на сохранение файла. Задача записывается в файл с расширением lp, которое при записи не должно задаваться.

Краткое повторение

- ❑ **Фрагментирование матрицы модели** – вывод на экран и корректирование с помощью редактора отдельных фрагментов большой матрицы.
- ❑ **Трансформация матрицы модели** – преобразование матрицы модели из канонической формы в формат пакета PLP-2000.

§ 5.3. Нахождение оптимального решения

Решение оптимизационной задачи

Запуск оптимизационной задачи на счет осуществляется под управлением (MASTER MENU). В случае необходимости возврата в (MASTER MENU) достаточно нажать клавишу F9 (MASTER MENU). Решение задачи начинается после нажатия клавиши F2 (SOLVE PROBLEM).

На экран выводятся номера параметров, исходные назначения допусков параметров: предел итераций; частота переобращений; допуск по итерации; допуск по допустимости; допуск по приведенной стоимости; допуск по элементам обратной матрицы; экранный

масштаб решения прямой задачи; масштаб решения двойственной задачи; масштаб значения целевой функции; запрос на обращение при завершении; печать всех решений по окончанию; запись базиса по окончанию; запись решения по окончании; распечатка записи

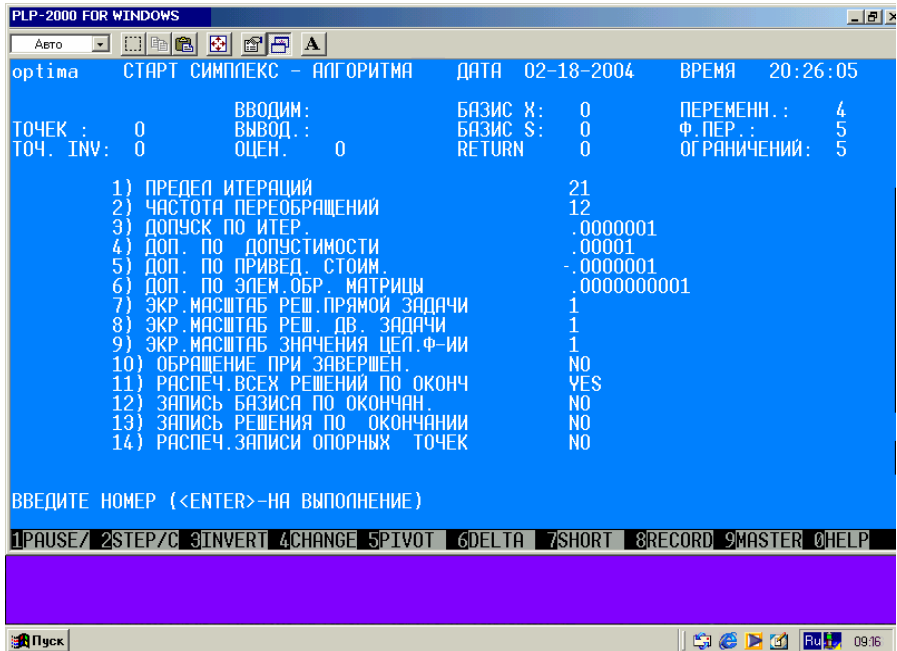


Рис. 5.5. Введение задаваемых допусков пакета PLP-2000

опорных точек. В ответ на запрос вводится новое значение (рис. 5.5).

В процессе решения задачи текущее меню автоматически заменяется на меню выполнения, которое высвечивается в строке 25 экрана. Имеется возможность трассировки вычисления по итерациям, прерывания вычисления с запоминанием текущего базиса и т. п. Если задаваемые параметры берутся по умолчанию без изменений, то на

ВВЕДИТ НОМЕР (<ENTER> – НА ВЫПОЛНЕНИЕ)

запрос, который выводится на экран монитора отвечают. ←

§ 5.3. Нахождение оптимального решения

Корректирование полученных результатов

После того как результаты решения уже получены, они должны быть тщательно проанализированы, и в случае необходимости, в них следует внести требуемые коррективы. Коррективы вносятся не только в том случае, когда получено НЕДОПУСТИМОЕ РЕШЕНИЕ или НЕОГРАНИЧЕННОЕ РЕШЕНИЕ, но так же когда РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ. Если в первых двух случаях внесение необходимых изменений связано с некорректностью постановки модели или ошибками ее формализации, то в случае, когда РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ, это может

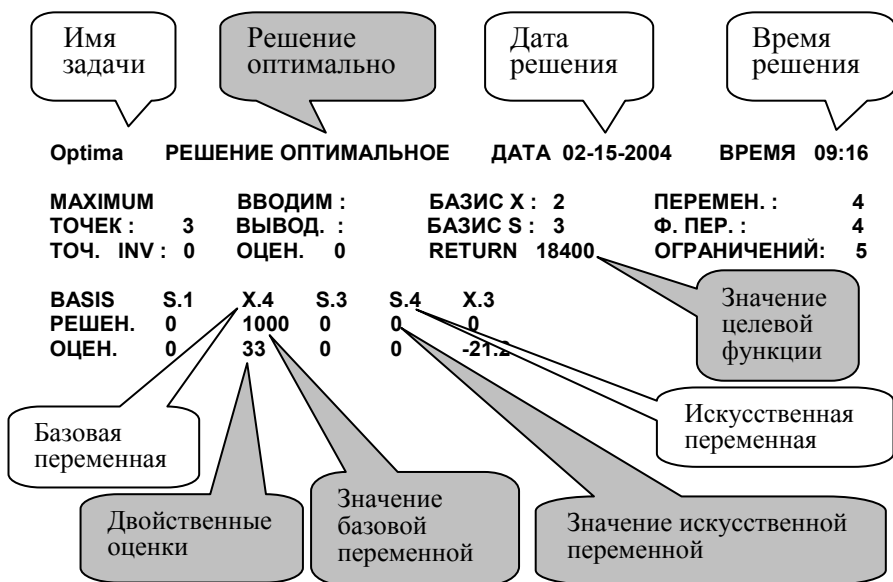


Рис. 5.6. Решение контрольного примера задачи оптимизации в формате пакета PLP-2000

быть продиктовано необходимостью дальнейшего улучшения модели. В ходе совершенствования модели в нее могут быть введены дополнительные переменные и ограничения, уточнены и скорректированы

нормативные коэффициенты, ограничения и коэффициенты целевой функции. Однокритериальная модель задачи может быть преобразована в многокритериальную модель.

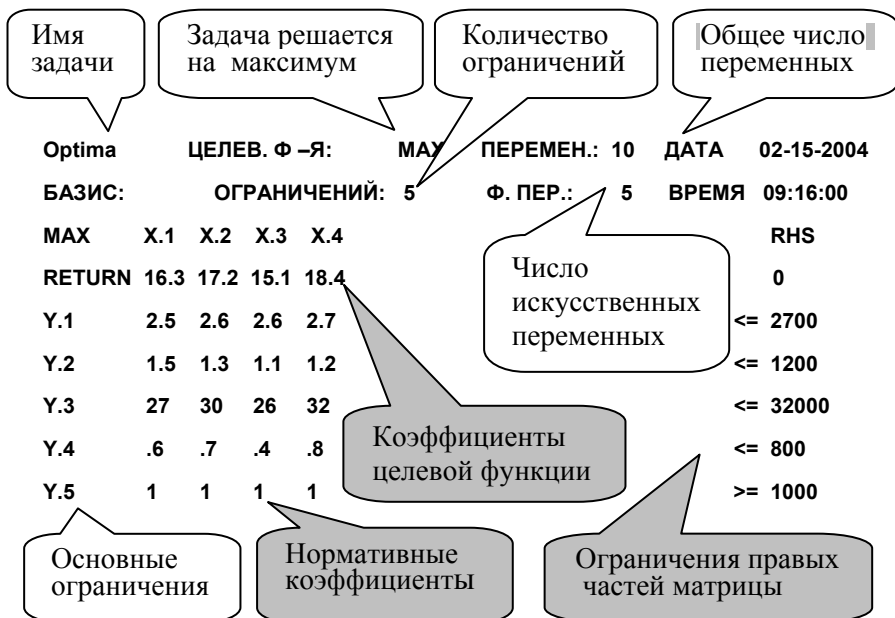


Рис. 5.7. Матрица модели контрольного примера задачи в формате пакета PLP-2000

На рис. 5.7 представлена матрица контрольного примера. Для изменения значений расчетных величин на основе анализа полученных результатов (рис.5.6), могут быть откорректированы ограничения правых частей матрицы модели, значения коэффициентов целевой функции, нормативные коэффициенты затрат. Для внесения соответствующих изменений в матрицу модели необходимо вернуться в (SETUP MENU) и нажатием клавиши F3 вызвать экранный редактор. После этого, необходимо нажать клавишу F9 (MASTER MENU), а вслед за ней клавишу F2 (SOLVE PROBLEM) для получения решения.

§ 5.3. Нахождение оптимального решения

Вывод результатов решения на печать

Вывод результатов оптимизационных расчетов на печать, осуществляется под управлением OUTPUT MENU. Меню вывода управляет выводом на печать таблиц выходных данных: решения прямой задачи; решения двойственной задачи; границ изменения целевой функции; границ изменения ограничений правой части.

Для вывода решения прямой задачи на печать, необходимо в (OUTPUT MENU) нажать клавишу F1. На печать выдается оптималь-

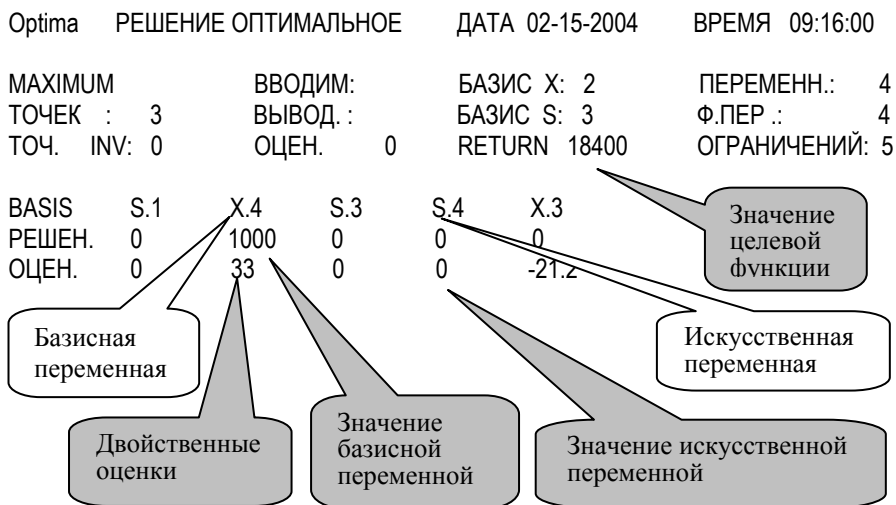


Рис. 5.8. Решение прямой задачи контрольного примера в формате пакета PLP-2000

ное решение задачи контрольного примера (рис. 5.8). В числе расчетных значений оптимизируемых величин, выдаются максимизируемое значение целевой функции RETURN, значения базисных переменных X.3 и X.4, искусственных (фиктивных) переменных S.1, S.3 и S.4, а также двойственные оценки переменных X.3 и X.4. Двойственные оценки показывают, на сколько может измениться величина целевой функции при увеличении значений этих переменных на одну единицу.

Для вывода решения прямой задачи на печать, следует нажать в (OUTPUT MENU) клавишу F1. На печать будет выдана целевая

Optima	РЕШЕНИЕ ... MAXIMUM	RETURN 18400	ДАТА	02-15-2004	
	РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ		ВРЕМЯ	09:16:00	
ПЕРЕМЕН.	СТАТУС	ЗНАЧ.	RETURN/UNIT	VALUE/UNIT	NET RETURN
X.1	NONBASIS	0	16.3	28.3	-12
X.2	NONBASIS	0	17.2	21.7	-4.5
X.3	BASIS	0	15.1	15.1	0
X.4	BASIS	1000	18.4	18.4	0
S.1	BASIS	0	0	0	0
S.2	NONBASIS	0	0	33	-33
S.3	BASIS	0	0	0	0
S.4	BASIS	0	0	0	0

Рис. 5.9. Решение прямой задачи контрольного примера в формате пакета PLP-2000

функция RETURN, переменные, их статус и значения, представленные на рис. 5.9. Для вывода решения двойственной задачи следует нажать клавишу F2. Будут выведены ограничения правых частей Y.1 – Y.5

Optima	РЕШЕНИЕ ... MAXIMUM	RETURN 18400	ДАТА	02-15-2004	
	РЕШ. ДВОЙСТВЕНН. ЗАДАЧИ		ВРЕМЯ	09:16:00	
СТРОКА	СТАТУС	ДВ. ОЦЕНКИ	ПР. ЧАСТЬ	ПОДСТ	Ф.ПЕР
Y.1	NONBINDING	0	2700	2700	0
Y.2	BINDING	33	1200	1200	0
Y.3	NONBINDING	0	32000	32000	0
Y.4	NONBINDING	0	800	800	0
Y.5	BINDING	-21.2	1000	1000	0

Рис. 5.10. Решение двойственной задачи контрольного примера в формате пакета PLP-2000

и двойственные оценки использования ресурсов и значения вводимых в модель искусственных (фиктивных) переменных (рис. 5.10).

§ 5.3. Нахождение оптимального решения

После нажатия клавиши F3 на печать будут выданы граничные значения изменений целевой функции, минимальные и максимальные значения коэффициентов (рис. 5.11). Нажатие клавиши F4, приведет

Optima	РЕШЕНИЕ ... MAXIMUM	RETURN 18400	ДАТА	02-15-2004	
	ОБЛАСТЬ ЗН. ЦЕЛ. Ф-ЦИИ		ВРЕМЯ	09:16:00	
ПЕРЕМЕН.	СТАТУС	ЗНАЧ.	RETURN/UNIT	MINIMUM	MAXIMUM
X.1	NONBASIS	0	16.3	NONE	28.3
X.2	NONBASIS	0	17.2	NONE	21.7
X.3	BASIS	0	15.1	NONE	18.4
X.4	BASIS	1000	18.4	16.15	NONE

Рис. 5.11. Границы изменения целевой функции задачи в формате пакета PLP-2000

к выдаче на печать границ изменения ограничений правой части оптимизационной задачи (рис. 5.12).

Optima	РЕШЕНИЕ ... MAXIMUM	RETURN 18400	ДАТА	02-15-2004	
	ОБЛАСТЬ ЗН. ПРАВ. ЧАСТИ		ВРЕМЯ	09:16:00	
СТРОКА	СТАТУС	ДВ. ОЦЕНКИ	ПР. ЧАСТИ	MINIMUM	MAXIMUM
Y.1	NONBINDING	0	2700	2700	NONE
Y.2	BINDING	33	1200	1100	1200
Y.3	NONBINDING	0	32000	32000	NONE
Y.4	NONBINDING	0	800	800	NONE
Y.5	BINDING	-21.2	1000	NONE	1000

Рис. 5.12. Границы изменения ограничений правой части задачи в формате пакета PLP-2000

Краткое повторение

- **Устанавливаемые допуски** – допуски, которые устанавливаются для пакета линейного программирования PLP-2000, при решении оптимизационных задач.

- **Корректирование результатов расчетов** – внесение в матрицу модели необходимых изменений и дополнений, на основании анализа полученных результатов.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ	
корректирование результатов расчетов меню пакета линейного программирования модифицированный симплекс-метод	устанавливаемые допуски фрагментирование матрицы модели трансформация матрицы модели

**Контрольные вопросы
и задания**



1. Возможности использования пакета PLP-2000.
2. Запуск пакета прикладных программ.
3. Работа с пакетом прикладных программ.
4. Работа с экраным редактором.
5. Формирование матрицы модели.
6. Сохранение матрицы модели.
7. Решение оптимизационной задачи.
8. Корректирование полученных результатов.
9. Вывод результатов решения на печать.
10. Решите контрольный пример с помощью PLP-2000.

Глава

6

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

В этой главе представлен постоптимизационный анализ решения задач. Дана экономическая интерпретация значений двойственных оценок. Проведен анализ чувствительности моделей, исследована устойчивость оптимального решения. Построена двойственная модель и проанализированы результаты решения.

§ 6.1. Постоптимизационный анализ

Интерпретация оценки ресурсов

Каноническая форма задач линейного программирования дает возможность экономической интерпретации значения *двойственных оценок* переменных. Для каждой задачи линейного программирования можно построить, симметричную ей двойственную задачу. Получаемые значения оптимальных решений обеих задач совпадают. Вместе с тем, если в прямой задаче они отражают наиболее эффективную комбинацию использования ресурсов, которая дает максимум целевой функции, то в двойственной задаче – наиболее эффективную комбинацию расчетных цен (оценок) ограниченных ресурсов. Хотя и принято считать прямой задачу решаемую на максимум получаемой прибыли, а двойственной – на минимум затрат, на самом деле эта формулировка достаточно условна, так как обе задачи абсолютно равноправны, любую из них можно принять за прямую и построить к ней двойственную.

Значение полученных при этом оценок состоит в том, что они служат эффективным инструментом нахождения решения основной задачи. Оценки показывают влияние введенных в ограничения модели дополнительных переменных на оптимизируемую величину целевой функции. Иначе говоря, они показывают относительный вклад ресурса в достижения необходимого оптимума. В силу того, что в

процессе производства продукции может использоваться не один ресурс, а несколько различных ресурсов, то двойственные оценки могут применяться для определения приоритета использования ресурсов в соответствии с их вкладом в величину целевой функции.

Пусть некоторая дополнительная переменная s_i , ограничения i является не базисной в точке оптимума, а само ограничение имеет вид

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (6.1)$$

Так как s_i вне базиса равна нулю, то данное исходное ограничение можно рассматривать как равенство в точке оптимума, т.е.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (6.2)$$

Теперь, по определению относительная оценка этой не базисной переменной – это величина, на которую может возрасти целевая функция при увеличении этой переменной на единицу. Равенство

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i + 1, \quad i = \overline{1, m}; \quad (6.3)$$

(6.1) – (6.2) показывает, что ресурс вида i потребляется весь полностью. Увеличив правую часть равенства (6.2) на единицу и преобразовав это равенство, мы получим равенство вида в котором

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + (-1) = b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (6.4)$$

переменная s_i принимает значение равное (-1) . Эта переменная показывает, какая часть ресурса не используется.

Относительна оценка переменной s_i дает величину прироста целевой функции на единицу увеличения ресурса вектора ограничений. Так как b_i представляет объем ресурса, то относительная оценка представляет собой относительную ценность единицы дополнительно ресурса. Эти относительные оценки являются *маргинальными* оценками в том смысле, что они действительны лишь при таком диапазоне изменения величины ресурсов b_i , когда текущий базис

§ 6.1. Постоптимизационный анализ

остается оптимальным. Так как решение оптимально, то относительная оценка будет положительной (не отрицательной), и поэтому целевая функция должна уменьшаться, если дополнительная переменная возрастает, и возрастать, если дополнительная переменная уменьшается. Избыточность ресурса на единицу (b_{i+1}) в правой части равенств модели рис. 6.1 приводит к тому, что в базис вводится свободная

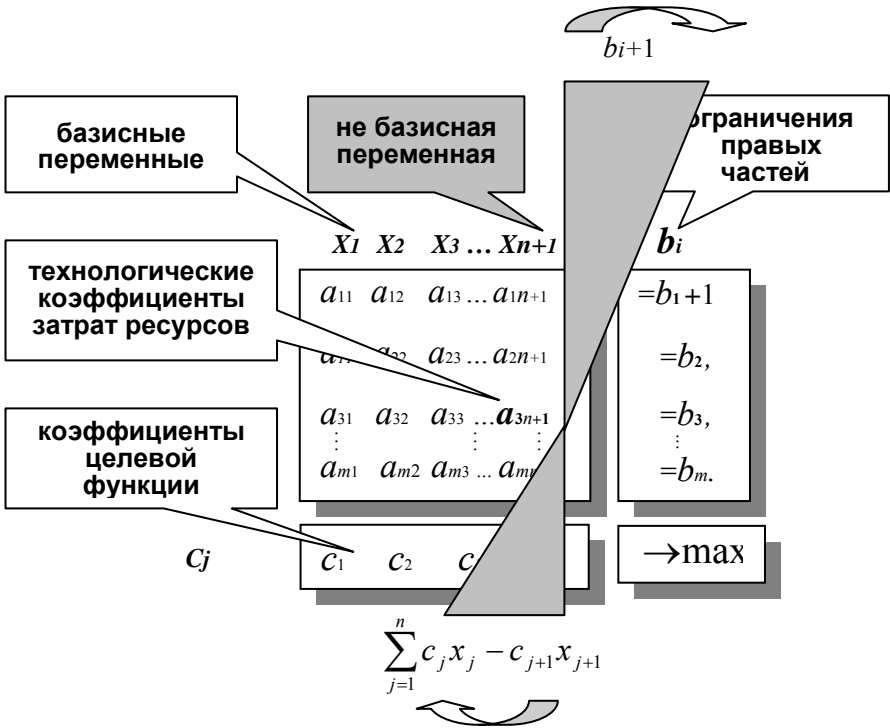


Рис. 6.1. Баланс использования ресурсов

переменная с не отрицательным значением. Однако существует некоторый предел эффективности увеличения запасов ресурсов, определяемый технологической структурой модели. В этом случае

нужно ожидать нулевого значения увеличения прибыли, поскольку увеличение заведомо *избыточного* ресурса не может увеличить прибыль. Именно такая ситуация и имеет место поскольку в базис вводится свободная переменная, с нулевым коэффициентом $c_{i+1}x_{i+1}$.

**Маргинальные
оценки
переменных**

Оценки ресурсов, связаны скорее с вводимыми в модель ограничениями, а не с переменными. Они показывают относительный вклад каждого ресурса в достижение необходимого оптимума. Тем не менее, они не редко используются для вычисления оценочных или стоимостных показателей, связанных с переменными прямой задачи.

Рассмотрим пример. Для загрузки печей по выплавке стали, комбинату требуется 1200 тонн железной руды. Поставка железной руды осуществляется горнодобывающим комбинатом, поставляющим руду всем предприятиям отрасли. Железная руда поставляется по цене 110 грн. за одну тонну. Ограничение по переработке железной руды может быть записано в модели в следующем виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = 1200, \tag{6.5}$$

где s_i – это дополнительная переменная. Пусть s_i имеет относительную оценку, равную 12 грн. за тонну в оптимальном решении, Что это означает? Оценка ресурса железной руды равна 12 грн. за тонну, но это вовсе не означает, что мы должны были бы заплатить только 12 грн. за каждую дополнительную тонну железной руды. Это означает, что за возможность получить дополнительный объем этой руды мы должны быть готовы заплатить еще по 12 грн. за тонну *при условии*, что эти последующие поставки будут осуществляться по цене 122 грн. за тонну; т.е. целевая функция будет увеличиваться на 12 грн. за каждую дополнительную тонну, которая будет получена по цене 110 грн. за тонну уже учтенной в целевой функции.

Это означает, что мы должны быть готовы к повышению цены до $110+12=122$ грн. за тонну за дополнительную поставку железной руды. Заметим, что 122 грн. за тонну – это *равновесная цена*, при которой мы будем увеличивать нашу целевую функцию, если будем покупать железную руду по более дешевой цене, чем эта; будем

уменьшать нашу целевую функцию, если будем покупать за большую цену, и сохраним целевую функцию неизменной, если платить только по 122 грн. за тонну.

Маргинальная оценка переменной x_i – это чистый доход, который может быть получен за каждую единицу ресурса, поставленного сверх существующего лимита, и равна оценке ресурса, т. е. двойственной переменной того условия задачи, которое ограничивает количество имеющегося ресурса. Маргинальная оценка остается постоянной только в пределах некоторой окрестности существующего оптимума, внутри которой текущий базис остается оптимальным как при увеличении, так и при уменьшении объема ресурсов (объема поставок).

Относительную оценку, которая отвечает не базисной переменной, равной своей *нижней* границе, часто рассматривают как *чистый эффект* этой переменной. Если принимая решение (неоптимальное) увеличить не базисную переменную, равную своей нижней границе, то эта относительная оценка показывает уменьшение значения целевой функции на единицу увеличения переменной (до некоторых пределов). Здесь относительные оценки указывают на эффект (убыток), обусловленный отклонением от оптимального решения.

Диапазон изменения параметров

Постоптимизационный анализ результатов полученных решений – наиболее важный этап экономико-математического моделирования. Вызвано это тем, что большая часть параметров задачи линейного программирования точно не известна, и на практике обычно берутся приближенные значения, которым должны быть равны эти параметры. В этой связи неизменно возникает интерес к определению таких диапазонов изменения этих параметров, в которых оптимальное решение остается оптимальным в том смысле, что не изменяется базис.

Рассмотрим три типа параметров: коэффициенты целевой функции c_j , компоненты вектора ограничений b_i и коэффициенты матрицы a_{ij} .

Изменение коэффициентов целевой функции

Не базисная переменная. Изменение коэффициентов целевой функции не базисной переменной влияет на относительную оценку только этой переменной.

Пример. В экономико-математической модели производственного процесса переменная x_j представляет собой количество некоторого выпускаемого продукта, который может быть продан по цене 110 грн./шт. ($c_j = 110$ грн./шт.). В оптимальном решении эта переменная не базисная ($x_j = 0$), и ее относительная оценка равна 1,20 грн./шт. Таким образом, если цена возрастет до $110 + 1,20 = 111,20$ грн./шт., относительная оценка станет равной нулю, и дальнейшее увеличение цены приведет к отрицательной относительной оценке. Это означает, что текущее решение перестанет быть оптимальным. В таком случае выгодно производить продукт, представленный переменной x_j . Следовательно, цена 111,20 грн./шт. – это *равновесная цена* для x_j ; при любой более низкой цене оптимальное решение будет состоять в том, чтобы совсем не производить этот продукт (x_j останется не базисным), а при более высокой цене выгодно ввести x_j в базис.

Для не базисной переменной *диапазон устойчивости*, в котором c_j может меняться так, чтобы текущее решение оставалось оптимальным, задается выражением $c_j + \Delta c_j$, где Δc_j – относительная оценка переменной x_j отвечающая оптимальному решению.

Базисная переменная. Изменение коэффициентов целевой функции базисной переменной влияет на относительные оценки не базисных переменных. Следует отметить, что вводя в решение некоторый технологический способ производства (т. е. делая соответствующую ему переменную базисной), мы увеличиваем уровень его использования. Это равносильно наиболее полной реализации всех потенциальных возможностей, связанных с получением прибыли от данного вида производственной деятельности. Любое дальнейшее повышение уровня его использования приведет к тому, что оценка ресурсов превысит прибыль. Очевидно, что с точки зрения оптимизации результатов решения такая попытка бесперспективна.

Существует диапазон изменения Δc_j коэффициентов целевой функции как базисных, так и не базисных переменных, в котором текущее оптимальное решение остается оптимальным. Для не базисных переменных существует только верхняя граница диапазона изменения Δc_j ; для базисных переменных обычно существуют и нижняя, и верхняя границы. При значении коэффициентов целевой функции, выходящей за пределы диапазона, текущее оптимальное решение становится неоптимальным, так как появится не базисная переменная с отрицательной относительной оценкой.

Изменение коэффициента целевой функции базисной переменной

приводит к изменению значения целевой функции.

Эффективность от изменения коэффициентов целевой функции можно рассматривать с двух позиций: с точки зрения сбыта нас интересуют равновесные цены; с точки зрения производства нас интересует диапазон изменения коэффициентов целевой функции, в пределах которого текущий оптимальный план (представленный текущим базисом) остается оптимальным.

Изменение ограничений правых частей

Рассмотрим влияние изменения $b_i = b_i + \Delta b_i$ для некоторого $1 \leq i \leq m$. Обычно принято рассматривать случай, когда компонента b_i является правой частью ограничений-неравенств, в которые введена дополнительная переменная. Определим такой диапазон изменения b_i , в котором текущее решение остается оптимальным. В этом случае, можно рассматривать соответствующую искусственную переменную как неотрицательную дополнительную (которая должна быть не базисной в допустимом решении).

Базисная дополнительная переменная. Если дополнительная переменная ограничения i базисная, то это ограничение не является активным в точке оптимума. Анализ значения дополнительной базисной переменной дает диапазон изменения, в котором компонента b_i уменьшается (увеличивается в случае ограничения типа \geq). Решение остается допустимым и оптимальным в диапазоне $b_i + \Delta b_i$.

Не базисная дополнительная переменная. Если дополнительная переменная не базисная и равна нулю, то исходное ограничение-неравенство активно в точке оптимума. На первый взгляд может показаться, что так как это ограничение активное, отсутствует возможность значения правой части такого ограничения, в частности возможность уменьшения значения b_i (для ограничений типа \leq). Оказывается, что изменяя вектор ограничений, мы меняем также Δb_i , а так как существует диапазон, в котором решение остается еще оптимальным, в том смысле, что не меняется базис.

Изменение коэффициентов матрицы модели

Коэффициенты a_{ij} , как правило, известны с большей достоверностью, чем коэффициенты целевой функции или ограничения правых частей матрицы модели. Они обычно задаются технологическими коэффициентами зависимости затрат и выпуска продукции и не подвержены так сильно рыночным изменениям, как цены или ресурсы.

Краткое повторение

- **Двойственные оценки** – это оценки ресурсов, продуктов, работ, которые вытекают из условий решаемой *оптимизационной задачи*. Будучи элементами *двойственной задачи* линейного программирования, они показывают, насколько изменится значение *критериев оптимальности* в соответствующей прямой задаче при приращении этого ресурса на единицу (т. е. имеют предельный характер).
- **Избыточный ресурс** – это ресурс, увеличение количества которого, не дает прироста величине получаемой прибыли.
- **Равновесная цена** – это граничная цена, при которой целевая функция будет увеличиваться если потребляемый ресурс приобретает по более низкой цене, и уменьшается, если цена на ресурс будет возрастать.

§ 6.2. Анализ чувствительности модели

Устойчивость оптимальных решений

Использование двойственных оценок особенно эффективно при анализе моделей на чувствительность. Решение оптимизационной задачи должно дать менеджеру, необходимую оперативную информацию относительно принятия наиболее эффективных решений. Как только условия, при которых выработывалось решение, и была построена модель, изменились,

информация, полученная в результате решения задачи, обычно теряет свою актуальность. Анализ модели на чувствительность как раз и связан с исследованием возможных изменений полученного оптимизационного решения в результате изменения исходной модели. Это дает возможность ответить на вопрос, в каком интервале можно варьировать входными параметрами без существенного отклонения от найденного оптимума и без значительного нарушения структуры базиса, формирующего оптимальное решение.

**Модель выбора
оптимальной
технологии**

Необходимо выбрать такие технологические способы производства продукции, при которых достигаются минимальные затраты и выполняется план по производству продукции при заданных ресурсах. Для построения модели выбора оптимальной

технологии введем следующие обозначения:

- k – вид производимой продукции;
- P_k – план производства продукции вида k ;
- s – вид выделяемых ресурсов;
- i – число видов производимой продукции;
- m – число видов выделяемых ресурсов;
- b_s – количество выделяемых ресурсов s ;
- j – вид технологий;
- n – число видов технологий;
- c_j – затраты на производство единицы продукции с использованием технологии вида j ;
- a_{jk} – количество производимой продукции вида k с использованием технологии j ;
- b_{sj} – количество потребляемых ресурсов вида s при использовании технологии j ;
- x_j – интенсивность использования технологии j .

Математическая модель. Определить интенсивность использования технологий x_j при которых достигается минимум затрат

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (6.6)$$

выполняется план производства

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \geq P_k, \quad k = \overline{1, l}; \quad (6.7)$$

используются выделяемые ресурсы

$$\sum_{j=1}^n b_{sj} x_j \geq b_s, \quad s = \overline{1, m}; \quad (6.8)$$

при условии неотрицательности переменных

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (6.9)$$

Задача выбора оптимальной технологии

Предприятия отрасли выпускают два вида продукции. Производство продукции осуществляется с использованием двух технологических способов, которые отличаются один от другого разными нормами затрат ресурсов и выпуска продукции.

Нормы затрат ресурсов и выпуска продукции по каждой из используемых технологий и стоимостные затраты приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Нормы затрат ресурсов и выпуска продукции

Номер технологии	Норма потребления ресурсов			Норма выхода продукта		Затраты млн грн. c_j
	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$k=1$	$k=2$	
$j=1$	2,5	1,5	1,5	5,0	30,0	7,0
$j=2$	1,5	0,4	4,0	4,0	6,0	8,0

§ 6.2. Анализ чувствительности модели

Планом производства продукции предусмотрено изготовить: продукции первого вида $P_1 = 200$ ед. и продукции второго вида $P_2 = 660$ ед. Объем выделяемых ресурсов при этом, составляет: $b_1 = 97$ ед., $b_2 = 54$ ед., $b_3 = 100$ ед. Матрица модели выбора

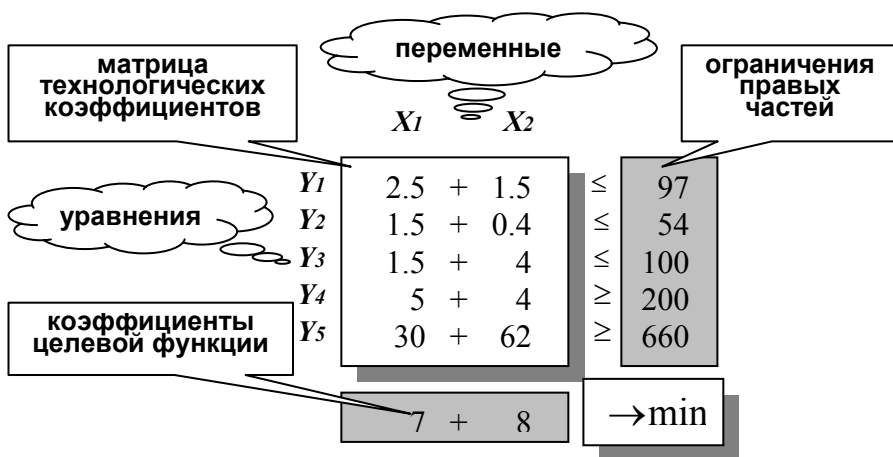


Рис. 6.2. Матрица модели выбора оптимальной технологии

оптимальной технологии представлена на рис. 6.2. Матрица модели включает два вектор-столбца, пять уравнений, ограничения правых частей и целевую функцию решаемую на минимум затрат.

Решение задачи оптимального выбора технологий

Анализ результатов расчетов показывает, что величина минимизируемых затрат на производство продукции $COST$ составит 298 млн грн. Величина интенсивности значения искомого переменных при этом составит $X_1 = 34$ (для первого вида продукции) и $X_2 = 7,5$ (для второго вида продукции). Для введенных в модель искусственных переменных, эта величина будет соответственно равна: $S_1 = 0,75$, $S_2 = 0$, $S_3 = 19$, $S_4 = 0$ и $S_5 = 885$. Значения

дополнительных (искусственных) переменных (рис. 6.3) показывают, что при этом, будет получена экономия 0,75 ед. ресурсов первого вида и 19 ед. ресурсов второго вида. План производства продукции второго вида продукции будет перевыполнен на 885 ед. В целом же будет выпущено: продукции первого вида – 200 ед. и продукции второго вида – 1485 ед.

ПРИМЕР РЕШЕНИЕ ... MINIMUM COST 298 DATA 02-23-2004
РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ВРЕМЯ 22:44:29

ПЕРЕМЕН.	СТАТУС	ЗНАЧ.	COST /UNIT	VALUE/UNIT	NET COST
X.1	BASIS	34	7	7	0
X.2	BASIS	7.5	8	8	0
S.1	BASIS	.75	0	0	0
S.2	NONBASIS	0	0	-3	3
S.3	BASIS	19	0	0	0
S.4	NONBASIS	0	0	-2.3	2.3
S.5	BASIS	885	0	0	0

Рис. 6.3. Решение прямой задачи выбора оптимальной технологии в формате пакета PLP-2000

Для анализа оптимизационного решения на чувствительность, рассмотрим результаты решения двойственной задачи (рис.6.4).

ПРИМЕР РЕШЕНИЕ ... MINIMUM COST 298 DATA 02-23-2004
РЕШ. ДВОЙСТВЕНН. ЗАДАЧИ ВРЕМЯ 22:44:31

СТРОКА	СТАТУС	ДВ. ОЦЕНКИ	ПР. ЧАСТЬ	ПОДСТ	Ф.ПЕР
Y.1	NONBINDING	0	97	96.25	.75
Y.2	BINDING	-3	54	54	0
Y.3	NONBINDING	0	100	81	19
Y.4	BINDING	2.3	200	200	0
Y.5	NONBINDING	0	600	1485	-885

Рис. 6.4. Решение двойственной задачи выбора оптимальной технологии в формате пакета PLP-2000

§ 6.2. Анализ чувствительности модели

Двойственные оценки показывают, что увеличение объема использования ресурса второго вида на 1 ед., приведет к уменьшению значения целевой функции на 3 ед. В то же время, увеличение выпуска продукции первого вида на 1 ед., приведет к увеличению значения целевой функции на 2,3 ед.

В анализе чувствительности модели очень важно выяснить в каких пределах могут варьировать коэффициенты целевой функции при условии, что это решение будет оставаться оптимальным. Результаты расчетов, представленные на рис. 6.5 показывают, что

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ...	MINIMUM	COST	298	ДАТА	02-23-2004
	ОБЛАСТЬ ЗН.	ЦЕЛ. Ф-ЦИИ			ВРЕМЯ	22:44:32
ПЕРЕМЕН.	СТАТУС	ЗНАЧ.	COST /UNIT	MINIMUM	MAXIMUM	
X.1	BASIS	34	7	NONE	10	
X.2	BASIS	7.5	8	5.6	NONE	

Рис. 6.5. Границы изменения целевой функции задачи выбора оптимальной технологии в формате пакета PLP-2000

нижней границы для изменения коэффициента целевой функции базисной переменной X.1 нет. Верхнее граничное значение коэффициента целевой функции этой переменной определяется числом 10.

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ...	MINIMUM	COST	298	ДАТА	02-23-2004
	ОБЛАСТЬ ЗН.	ПРАВ. ЧАСТИ			ВРЕМЯ	22:44:34
СТРОКА	СТАТУС	ДВ. ОЦЕНКИ	ПР. ЧАСТИ	MINIMUM	MAXIMUM	
Y.1	NONBINDING	0	97	96.25	NONE	
Y.2	BINDING	-3	54	48.57143	55.2	
Y.3	NONBINDING	0	100	81	NONE	
Y.4	BINDING	2.3	200	180	202.4	
Y.5	NONBINDING	0	600	NONE	1485	

Рис. 6.6. Границы изменения ограничений задачи выбора оптимальной технологии в формате пакета PLP-2000

Напротив, нижнее граничное значение коэффициента целевой функции переменной X_2 определяется числом 5,6. Верхнее граничное значение этого коэффициента не задано.

Проанализируем теперь, остается ли решение оптимальным, если изменятся значения ограничений правой части матрицы модели. Для этого необходимо рассмотреть граничные значения ограничений задачи выбора технологий представленные на рис. 6.6. Результаты расчетов показывают, что нижнее граничное значение объема ресурса первого вида составляет 96,25 ед. Верхнее значение его объема не ограничено. Для ресурса второго вида нижнее граничное значение объема равняется 48,57143 ед. Верхнее граничное значение равно – 55,2 ед. Увеличение использования этого ресурса с 54 ед. на одну ед., приведет к снижению затрат на 3 млн грн. Нижняя граница использования ресурса третьего вида составляет 81 ед. Верхнее значение его объема не ограничено. Нижняя граница выпуска продукции первого вида численно равняется 180 ед., верхняя – 202,4 ед. Увеличение выпуска этой продукции с уровня 200 ед. на одну ед. приведет к увеличению затрат на 2,3 млн грн. Нижняя граница выпуска продукции второго вида не установлена. Верхняя граница выпуска равняется 1485 ед.

Краткое повторение

- **Устойчивость оптимального решения** – условие, при котором изменение коэффициентов целевой функции, ограничений правой части и технологических коэффициентов не приводит к изменению оптимальности решения.
- **Интервал изменения параметров** – пределы варьирования входными параметрами модели без существенного отклонения от оптимума и без значительного нарушения структуры базиса, формирующего оптимальное решение.

§ 6.3. Чувствительность двойственной модели

Двойственная модель выбора технологий

Представленные выше методы оценки чувствительности моделей, хотя и являются эффективным средством исследования устойчивости оптимизационных решений, но носит несколько ограниченный характер.

Понятно, можно было бы разработать методы анализа, позволяющие произвести оценку чувствительности оптимизационных моделей по отношению к вариациям коэффициентов a_{ij} с тем, чтобы определить, насколько “выгодно” дополнить базис новой переменной, а также выяснить, в какой степени изменится решение, если ввести дополнительные ограничения. Однако в теории линейного программирования существует понятие **двойственности**, которое позволяет унифицированным образом установить взаимосвязи для всех приемов и методов анализа чувствительности моделей.

Рассмотрим это на примере двойственной модели выбора технологий. Для построения двойственной модели оптимального выбора технологий введем дополнительные обозначения: u_s – оценка ресурса s ; v_k – оценка продукции k .

Математическая модель. Найти такие оценки u_s и v_k , при которых достигается максимум целевой функции

$$\sum_{k=1}^l P_k v_k - \sum_{s=1}^m b_s u_s \rightarrow \max \quad (6.10)$$

и выполняются условия ограничений

$$\sum_{k=1}^l a_{jk} v_k - \sum_{s=1}^m b_{sj} u_s \leq c_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6.11)$$

и неотрицательности переменных

$$v_k \geq 0; \quad u_s \geq 0; \quad k = \overline{1, l}; \quad s = \overline{1, m}. \quad (6.12)$$

Дифференциальные затраты получаются из двойственной задачи выбора технологии при условии, что по каждой из технологий производится только один какой-либо продукт.

$$v_k = c_k + \sum_{s=1}^m b_{sj} u_s \quad k = \overline{1, l}. \quad (6.13)$$

Двойственные (объективно обусловленные) оценки

$$v_k = \frac{1}{a_{kj}} \left[\left(c_j + \sum_{s=1}^m b_{sj} u_s \right) - \sum_{k=1}^l a_{kj} v_k \right]. \quad (6.14)$$

Дифференциальные затраты и двойственные оценки показывают оценку продукции с учетом дефицитности ресурсов.

**Двойственная
задача выбора
технологий**

Матрица двойственной задачи оптимизации выбора технологий включает в себя пять вектор-столбцов, два уравнения-ограничения и целевую функцию. Ограничениями правой части матрицы модели выступают затраты на производство продукции двух видов (рис. 6.7). Коэффициентами целевой функции является планируемый объем выпуска продукции

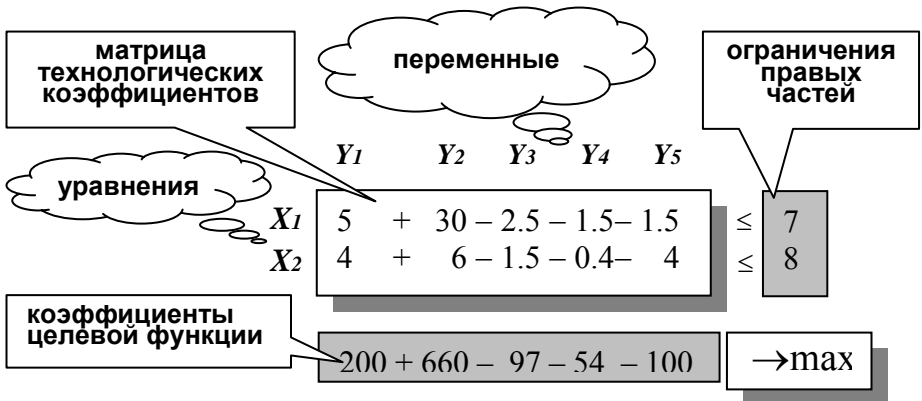


Рис. 6.7. Матрица двойственной модели выбора технологий

(переменными которой служат Y_1 и Y_2), и ограничения объема использования ресурсов (переменными которой выступают $Y_3 - Y_5$).

§ 6.3. Чувствительность двойственной модели

Технологические коэффициенты затрат и выпуска продукции взяты те же, что и в предыдущей задаче. Матрица модели двойственной задачи выбора технологии была построена по известному правилу трансформации исходной задачи в двойственную задачу. Теория двойственности имеет место в том случае, когда прямая и двойственная матрицы модели записаны в каноническом виде. В этой связи необходимо придерживаться приведенных выше правил.

Исходная задача

<i>Минимизация</i>
<i>Константы в правых частях ограничения</i>
<i>Целевая функция</i>
<i>столбец j составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях</i>
<i>строка i составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях</i>
<i>неотрицательная переменная j</i>
<i>переменная j, не имеющая ограничений в знаке</i>
<i>неравенство i вида \leq</i>
<i>соотношение i в виде равенства</i>

Двойственная задача

<i>Максимизация</i>
<i>Целевая функция</i>
<i>Константы в правых частях ограничения</i>
<i>строка i составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях</i>
<i>столбец j составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях</i>
<i>неравенство i вида \geq</i>
<i>соотношение i в виде равенства</i>
<i>неотрицательная переменная j</i>
<i>переменная j, не имеющая ограничений в знаке</i>

Решения двойственной задачи

Решение двойственной задачи оптимального выбора технологии, дало возможность получения результатов идентичных решению прямой задачи. Максимизация значения целевой функции RETURN, позволила получить прибыль в размере 298 млн грн., что целиком соответствует величине минимизируемых затрат целевой функции COST исходной, прямой

задачи (рис. 6.3). Модули значений базисных (BASIS) переменных Y.1 и Y.4 результатов решения двойственной задачи (рис. 6.7) соответствуют значениям двойственных оценок прямой задачи (рис.6.3). Значения найденных переменных величин X.1 и X.2 соответствуют

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ... MAXIMUM	RETURN	298	ДАТА	02-23-2004
	РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ			ВРЕМЯ	22:44:36
ПЕРЕМЕН.	СТАТУС	ЗНАЧ.	RETURN/UNIT	VALUE/UNIT	NET RETURN
Y.1	BASIS	2.3	200	200	0
Y.2	NONBASIS	0	660	1065	-405
Y.3	NONBASIS	0	-97	-96.25	-75
Y.4	BASIS	3	-54	-54	0
Y.5	NONBASIS	0	-100	-81	-19
S.1	NONBASIS	0	0	34	-34
S.2	NONBASIS	0	0	7.5	-7.5

Рис. 6.8. Решение прямой задачи выбора оптимальной технологии в формате пакета PLP-2000

полученным двойственным оценкам решения двойственной задачи (рис. 6.9.). Анализ границ изменения целевой функции задачи выбора

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ... MAXIMUM	RETURN	298	ДАТА	02-23-2004
	РЕШ. ДВОЙСТВЕНН. ЗАДАЧИ			ВРЕМЯ	22:44:38
СТРОКА	СТАТУС	ДВ. ОЦЕНКА	ПР. ЧАСТЬ	ПОДСТ	Ф.ПЕР
X.1	BINDING	34	7	7	0
X.2	BINDING	7.5	8	8	0

Рис. 6.9. Решение двойственной задачи выбора оптимальной технологии в формате пакета PLP-2000

оптимальной технологии показывает, что коэффициент целевой функции переменной Y.1 = 200 ед, может варьировать в пределах от 180 ед. до 202.4 ед. Значение переменной Y.4 = -54 ед., может варьировать в пределах от -54.2 до -48.57143 ед. Для переменных Y.2, Y.3 и Y.4

§ 6.3. Чувствительность двойственной модели

нижней границы значения переменной не установлено. Предельные значения этих переменных составляют: $Y_2 = 1065$ ед., $Y_3 = -96,25$ ед. и $Y_4 = -48,57143$ ед. (рис. 6.9). На рис. 6.10 показаны границы изменения ограничений двойственной задачи, которые соответствуют изменению границ целевой функции исходной задачи (рис. 6.5).

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ... MAXIMUM	RETURN 298	ДАТА 02-23-2004		
	ОБЛАСТЬ ЗН. ЦЕЛ. Ф-ЦИИ		ВРЕМЯ 22:44:40		
ПЕРЕМЕН.	СТАТУС	ЗНАЧ.	RETURN/UNIT	MINIMUM	MAXIMUM
Y.1	BASIS	2.3	200	180	202.4
Y.2	NONBASIS	0	660	NONE	1065
Y.3	NONBASIS	0	-97	NONE	-96.25
Y.4	BASIS	3	-54	-55.2	-48.57143
Y.5	NONBASIS	0	-100	NONE	-81

Рис. 6.10. Границы изменения целевой функции задачи выбора оптимальной технологии в формате пакета PLP-2000

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ... MAXIMUM	RETURN 298	ДАТА 02-23-2004		
	ОБЛАСТЬ ЗН. ПРАВ. ЧАСТИ		ВРЕМЯ 22:44:42		
СТРОКА	СТАТУС	ДВ. ОЦЕНКА	ПР. ЧАСТЬ	MINIMUM	MAXIMUM
X.1	BINDING	34	7	NONE	10
X.2	BINDING	7.5	8	5.6	NONE

Рис. 6.11. Границы изменения ограничений задачи выбора оптимальной технологии в формате пакета PLP-2000

Модель оптимальной сложности

При построении моделей и выполнении оптимизационных расчетов возникает необходимость введения в модель дополнительных ограничений после того, как уже получено предварительное решение для первоначальной модели. Необходимость введения в модель дополнительных ограничений возникает после анализа полученного оптими-

зационного решения. В ряде других случаев некоторые ограничения, имевшие место в первоначальной формулировке задачи, сознательно опускаются чтобы упростить процесс получения решения. Опыт показывает, что сложности получения оптимального решения возрастают пропорционально кубу числа ограничений. Устанавливая ограничения для исходной модели, нужно быть осмотрительным. Нередко заведомо известно, что некоторые из ограничений лишь в незначительной степени влияют (либо не влияют вообще) на получаемое оптимальное решение. Такие ограничения (иногда их называют **второстепенными**) учитываются по мере необходимости на последующих этапах анализа.

Проверка выполнимости добавочного условия при известном решении исходной задачи представляет собой простейший случай анализа модели на чувствительность. Для этого достаточно подставить оптимальные значения управляемых переменных в дополнительное условие и проверить, выполняется ли это условие.

В некоторых случаях целесообразность введения дополнительно-го ограничения можно проверить на введении в двойственную модель нового технологического способа производства. Новый вид производственной деятельности можно ассоциировать с такой не базисной переменной исходной модели, которая первоначально имеет *нулевые* коэффициенты в целевой функции. Значения соответствующих коэффициентов нового вида производственной деятельности будут представлять изменения относительно исходного нулевого значения.

Краткое повторение

- ❑ **Правило трансформации** – правило преобразования задачи линейного программирования в двойственную задачу и наоборот в исходную.
- ❑ **Модель оптимальной сложности** – модель, матрица которой содержит необходимое количество вектор-столбцов и ограничений.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

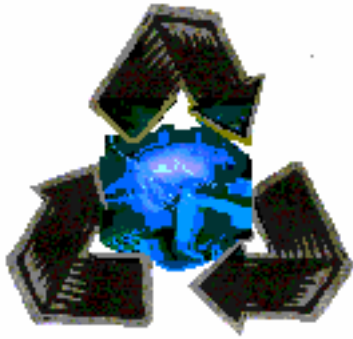
двойственные оценки
избыточный ресурс
модель оптимальной сложности
правило трансформации

равновесная цена
устойчивость оптимального решения
чувствительность модели

**Контрольные вопросы
и задания**



1. Интерпретация оценки ресурсов.
2. Маргинальные оценки переменных.
3. Диапазон изменения параметров.
4. Устойчивость оптимальных решений.
5. Модель выбора оптимальной технологии.
6. Задача выбора оптимальной технологии. Ее решение.
7. Двойственная модель выбора технологий.
8. Двойственная задача выбора технологий. Ее решение.
9. Модель оптимальной сложности.
10. Решите примеры задач с помощью PLP-2000.



Часть IV

Моделирование оптимального распределения ресурсов

Тема 7. *Моделирование загрузки мощностей*

§ 7.1. Оптимизация загрузки оборудования

§ 7.2. Оптимизация загрузки оборудования цеха

§ 7.3. Оптимизация загрузки оборудования предприятия

Тема 8. *Моделирование распределения ресурсов*

§ 8.1. Оптимальное распределение ресурсов

§ 8.2. Распределение ресурсов внутри цеха

§ 8.3. Распределение ресурсов на предприятии

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЗАГРУЗКИ
МОЩНОСТЕЙ**

В этой главе рассмотрены вопросы оптимизации загрузки производственных мощностей промышленных предприятий. Основное внимание в ней уделено практическому решению задач оптимизации загрузки оборудования цеха и предприятия в целом. Дан анализ результатов полученных оптимизационных решений.

§ 7.1. Оптимизация загрузки оборудования

**Загрузка
производственных
мощностей**

Эффективность работы предприятия на нынешнем этапе, количество выпускаемой продукции, ее качество и ассортимент неизменно зависят от уровня загрузки производственных мощностей, степени и порядка использования технологического оборудования. Важность решения этой задачи, ее практическая значимость определяются как ограниченностью производственных мощностей предприятий, так и возможностью разного использования технологического оборудования. Это означает, что эффективность производства определяется не только количеством имеющихся станков и технологических линий, но и выбором наиболее рационального варианта их загрузки при выполнении отдельных работ.

Задача оптимизации загрузки оборудования может решаться в двух постановках: для взаимозаменяемых групп оборудования и незаменимых групп оборудования. Выбор одного из вариантов построения экономико-математической модели зависит от универсальности используемого технологического оборудования. Для цехов предприятий оснащенным большим количеством универсальных

станков, которые отличаются высоким уровнем взаимозаменяемости при выполнении ряда технологических операций, необходима модель *оптимизации загрузки взаимозаменяемых групп оборудования*. Применение этой модели дает возможность для нахождения оптимального варианта перераспределения работ между отдельными видами и группами оборудования, между производственными подразделениями предприятия.

В поточном производстве, где используется специальное и специализированное технологическое оборудование, операции жестко закреплены за отдельными станками. В силу этого, оборудование не взаимозаменяемо и группируется в порядке последовательности выполнения технологических операций. Для такого типа производства следует использовать модель *оптимизации загрузки незаменимых групп оборудования*.

Масштаб решения задачи

Перераспределение работ между станками и группами технологического оборудования может проводиться между отдельными участками цехов, а на предприятии между цехами. Масштаб решения задачи *оптимизации загрузки оборудования* и объем перераспределяемых работ при этом определяются целями и задачами исследования.

Для предприятий перерабатывающих отраслей промышленности (машиностроения, обувной промышленности, деревообработки), с прерывным характером процесса производства, парк станочного оборудования является одним из наиболее обширных. В цехах этих предприятий в зависимости от их размеров и специализации, может быть установлено как большое количество малопроизводительных, универсальных станков, так и небольшое число высокопроизводительного, специализированного технологического оборудования. Число используемого технологического оборудования, его тип и мощность определяют внутрипроизводственную структуру предприятия, количество его цехов и участков. Это, в свою очередь, обуславливает необходимость перераспределения работ как внутри цеха между отдельными участками, так и между цехами внутри предприятия с целью наиболее полной загрузки станков. Если в первом случае перераспределение загрузки станков осуществляется внутри цеха между отдельными участками, то во втором – между

цехами. В связи с этим, модель оптимизации загрузки оборудования решаемая на уровне предприятия, является более сложной. Она состоит из отдельных блоков, каждый из которых представляет собой модель оптимизации загрузки оборудования цеха, объединенных рядом ограничений и общей целевой функцией.

В отличие от задачи оптимизации загрузки оборудования цеха решаемой в один прием, задача оптимизации загрузки оборудования предприятия решается в несколько этапов. На начальном этапе, решаются отдельные задачи оптимизации загрузки цеха, а затем уже общая задача оптимизации загрузки оборудования всего предприятия. Исходя из результатов полученных расчетов и анализа двойственных оценок вносятся необходимые коррективы в ограничения выпуска продукции и времени работы оборудования.

Краткое повторение

- ❑ **Задача оптимизации загрузки оборудования** – задача определения объемов выпуска продукции в зависимости от мощности и типа используемого технологического оборудования.
- ❑ **Оптимизация загрузки взаимозаменяемого оборудования** – перераспределение работ между цехами и участками предприятия оснащенных универсальным технологическим оборудованием и станками.
- ❑ **Оптимизация загрузки невзаимозаменяемого оборудования** – перераспределение работ между цехами и участками предприятия оснащенных специализированным технологическим оборудованием и станками.
- ❑ **Масштаб решения задачи** – величина объема перераспределения работ между цехами и участками предприятия, оснащенных универсальным технологическим оборудованием и станками, определяемого целями и задачами исследования.

§ 7.2. Оптимизация загрузки оборудования цеха

Задача оптимизации загрузки оборудования Л.В. Канторовича

Токарная работа в механическом цехе может производиться на различных станках: токарных, револьверных – более усовершенствованных и револьверном автомате. Для обработки деталей в цехе имеется три токарных станка, три револьверных и один автомат. На этих станках в цехе изготавливается два вида деталей, которые отличаются одна от другой своей сложностью и прибылью, которую они приносят. В

Таблица 7.1

Производительность станков механического цеха

Группы станков	Число станков	Производительность по каждому станку		Суммарная производительность	
		I деталь	II деталь	I деталь	II деталь
Токарные	3	10	20	30	60
Револьверные	3	20	30	60	90
Автомат	1	30	80	30	80

зависимости от степени сложности детали и станка, на котором она изготавливается, время, затрачиваемое на ее обработку может быть различным. За рабочий день на токарном станке можно изготовить 10 первых деталей либо 20 вторых, на револьверном – 20 первых либо 30 вторых, на автомате – 30 первых либо 80 вторых. Данные о производительности станков приведены в табл. 7.1. Если учитывать все количество станков, которое имеется в цехе (три токарных, три револьверных и один автомат), то за рабочий день можно изготовить первых деталей на каждой группе станков $30 + 60 + 30$, на всех станках – 120, вторых деталей – $60 + 90 + 80$, на всех станках – 230. Производство первой детали дает предприятию прибыль 15 грн,

§ 7.2. Оптимизация загрузки оборудования цеха

второй детали – 10 грн. В течение месяца (21 рабочий день) в цехе должно быть изготовлено не менее 1617 деталей первого вида и такое же количество деталей второго вида.

Для решения задачи необходимо разбить время работы станков механического цеха таким образом, чтобы по возможности загрузить их на полную мощность. При этом важно не просто произвести наибольшее количество деталей, но и найти способ максимального выпуска комплектных изделий, т. е. комплектов, состоящих в данном случае из двух деталей разных видов, из которых впоследствии собирается изделие.

Возможные решения распределения обработки деталей по станкам приведено в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Распределение обработки деталей по станкам

Группы станков	Простейшее решение		Наиболее выгодное решение	
	I деталь	II деталь	I деталь	II деталь
Токарные	20	20	26	6
Револьверные	36	36	60	–
Автомат	21	21	–	80
Количество комплектов	77	77	86	86

Если не стараться решать задачу на максимум, а добиваться только комплектности, то можно на каждом станке производить обе детали в одинаковом количестве. Для этого достаточно разбить рабочий день каждого станка так, чтобы он произвел одинаковое число той и другой детали. Тогда оказывается, что токарные станки в течение смены могут обработать 20 первых и 20 вторых деталей. В самом деле, на токарных станках производство 20 вторых деталей эквивалентно 10 первым. Револьверные станки могут обработать тогда 36 первых и 36 вторых, автомат обработать 21 первую и 21 вторую деталь, а общая производительность по всем станкам будет

равна 77 первых и 77 вторых деталей, т.е. 77 комплектов. В этом случае, цех за месяц изготовит 1617 комплектов деталей.

Найдем простейшее решение. Время обработки на токарном станке первой и второй детали соотносится как 1:2, на револьверном станке это отношение – 2:3, на автомате – 3:8. Это может объясняться разными причинами: одна операция может на всех станках занимать одинаковое время, другая операция может на автомате проходить в 5 раз быстрее, чем на токарном станке, и т. д. Именно в связи с такими условиями эти отношения бывают различными для разных станков при обработке одних и тех же деталей. Одну деталь лучше изготовить на одном станке, другую – на другом.

Первую деталь следует обрабатывать на тех станках, где это наиболее выгодно (на револьверных), а второй деталью нужно загрузить автомат. Что касается токарных станков, то между ними следует частично разделить производство первой и второй детали, причем разбивку нужно произвести так, чтобы в сумме получалось одинаковое число первых и вторых деталей.

Если произвести разбивку по этому способу, то цифры будут такие: на токарном 26 и 6; на револьверном только 60 первых деталей, вторых не будет; на автомате 80 вторых, а первых деталей не будет вовсе. Всего при этом, получится 86 первых и 86 вторых деталей.

Таким образом, если произвести перераспределение времени обработки деталей, то за счет этого будет получено не очень большой, но существенный эффект – увеличения выработки на 12 %; при этом рост производительности будет получен без каких-либо дополнительных затрат.

Но эта задача решается так легко только в таком случае, когда у нас три станка и две детали. Практически в большинстве случаев встречаются достаточно сложными ситуациями, и найти решение руководствуясь одним только здравым смыслом вряд ли возможно. Трудно надеяться, что можно сразу угадать такое решение.

Формализация и решение задачи

Формализация экономико-математической модели задачи оптимизации загрузки оборудования в соответствии с основными канонами линейного моделирования требует строгого определения вектор–столбцов матрицы технологических коэффициентов, ограничений правых

§ 7.2. Оптимизация загрузки оборудования цеха

частей и коэффициентов целевой функции. Размерность матрицы модели определяется числом технологических способов (рис. 7.1), которые представляют собой возможные варианты обработки деталей. Для рассматриваемой задачи число возможных вариантов обработки двух видов деталей на трех различных станках (токарном, револьверном и автомате) равняется шести. Ограничения модели задачи

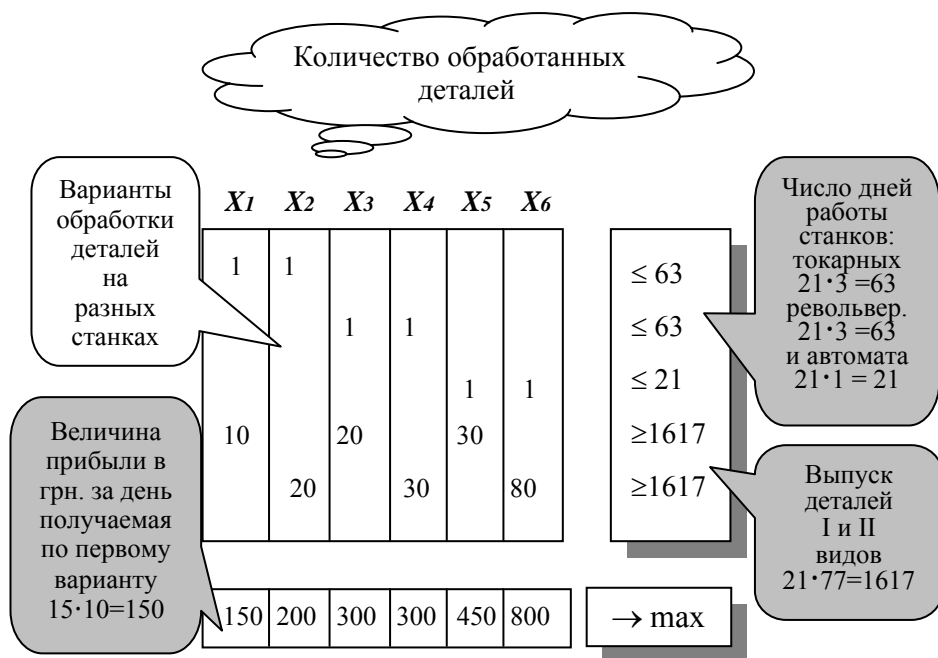


Рис. 7.1. Матрица экономико-математической модели оптимизации загрузки оборудования цеха

оптимизации загрузки оборудования, является количество рабочих дней работы станков (трех токарных, трех револьверных и автомата), задаваемого в модели, и выпуска деталей (двух видов), задаваемого в модели двумя неравенствами. Время работы станков определялось исходя из количества станков и рабочих дней. Для токарных станков

оно составило $3 \cdot 21 = 63$ дня, револьверных $3 \cdot 21 = 63$ дня и автоматов $1 \cdot 21 = 21$ день. Выпуск деталей первого и второго вида определялись исходя из количества обрабатываемых за день комплектов и количества рабочих дней. Планируемое количество выпуска первой и второй детали при этом, составляет $77 \cdot 21 = 1617$ шт.

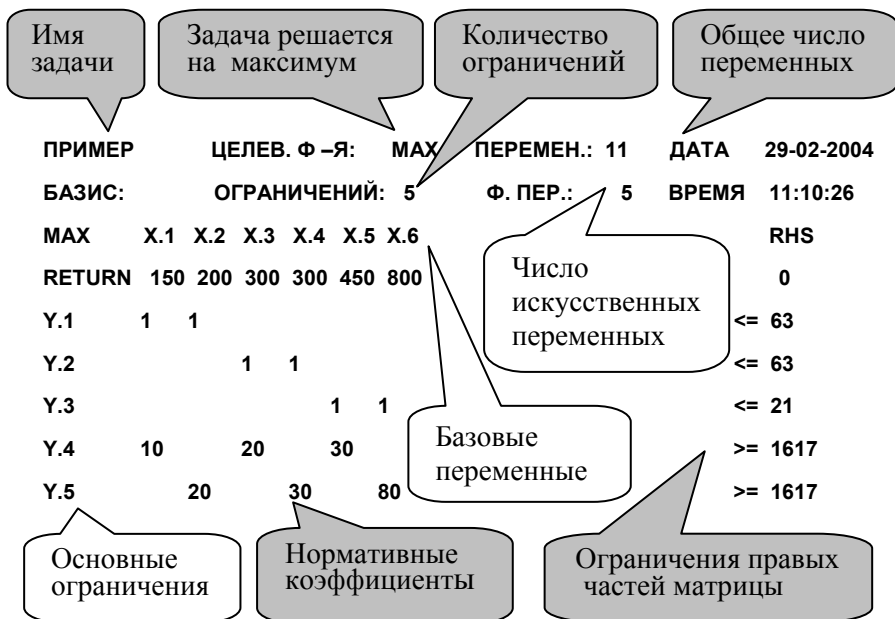


Рис. 7.2. Матрица модели оптимизации загрузки оборудования цеха в формате пакета PLP-2000

Целью решения задачи является максимизация величины прибыли получаемой предприятием от производства деталей. Коэффициентами целевой функции, выступает прибыль, получаемая за день от обработки деталей по тому или иному варианту. Так например, на токарном станке за день можно изготовить 10 деталей первого вида и 20 деталей второго. Дневная прибыль от их обработки деталей при этом составит соответственно $15 \cdot 10 = 150$ грн. и $10 \cdot 20 = 200$ грн.

§ 7.2. Оптимизация загрузки оборудования цеха

Задача оптимизации загрузки оборудования была решена симплексным методом на компьютере с помощью пакета прикладных программ линейного программирования PLP-2000. Текст исходной матрицы решаемой оптимизационной задачи загрузки оборудования в формате пакета PLP-2000 приведен на рис. 7.2. Кроме матрицы

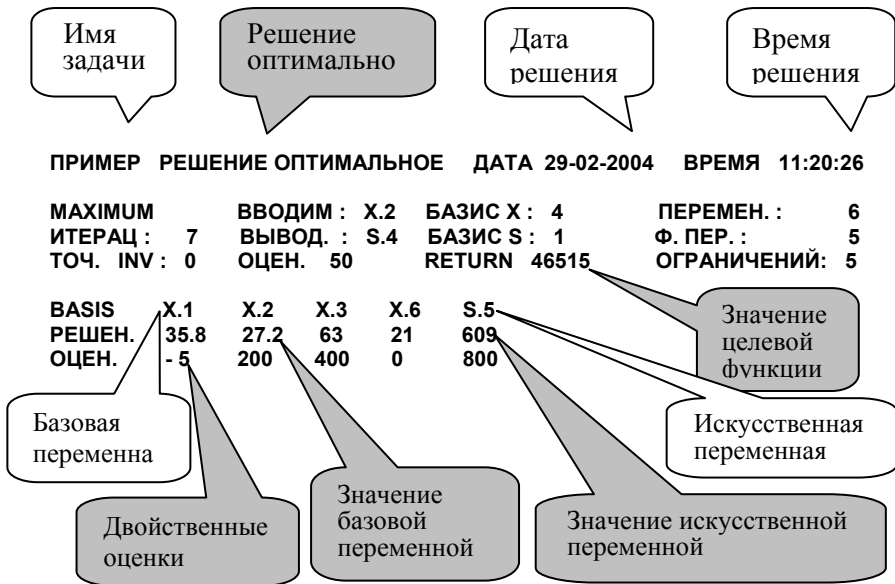


Рис. 7.3. Решение задачи оптимизации загрузки оборудования цеха в формате пакета PLP-2000

модели, ее нормативных коэффициентов, ограничений правых частей (столбец **RHS**), коэффициентов максимизируемой целевой функции (строка **RETURN**), имени решаемой задачи, здесь также дано общее число переменных и количество ограничений, число фиктивных переменных. Последнее особенно важно, так как дает возможность более полного анализа результатов полученных решений.

Результаты решения рис. 7.3 показывают, что при оптимальной загрузке станков в механическом цехе может быть получена прибыль

Глава 7 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАГРУЗКИ МОЩНОСТЕЙ

в размере 46 515 грн. При этом время работы токарных станков должно быть разделено между первой и второй деталью. Причем из 63 дней работы токарных станков на обработку первой детали должно быть отведено 35,8 дней, а на обработку второй 27,2 дней. Если

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-Я: MAX								ПЕРЕМЕН.: 11	ДАТА 29-02-2004
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ: 8								Ф. ПЕР.: 8	ВРЕМЯ 11:30:26
MAX	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	RHS	
RETURN	150	200	300	300	450	800			0	
Y.1	1	1							<= 63	
Y.2			1	1					<= 63	
Y.3					1	1			<= 21	
Y.4	10		20		30		-1		= 0	
Y.5		20		30		80		-1	= 0	
Y.6							1		>= 1820	
Y.7								1	>= 1820	
Y.8							1	-1	= 0	



Рис. 7.4. Модифицированная матрица модели оптимизации загрузки оборудования в формате пакета PLP-2000

учесть, что обработка деталей производится на трех токарных станках, то в течение 21 дня на первом станке можно обрабатывать первую деталь. Изменения в работе коснутся второго станка, так как 14,8 дня на нем следует обрабатывать первую деталь и 6,2 дня – вторую. Что же касается третьего токарного станка, то в течение 21 дня он будет обрабатывать вторую деталь. Три револьверных

§ 7.2. Оптимизация загрузки оборудования цеха

станка и автомат при этом будут полностью задействованы на обработке первой и второй детали. Это целиком подтверждает, что первую деталь следует обрабатывать на револьверных станках, а вторую – на автомате. Реализация такого рода плана даст возможность ежемесячно получать 1617 комплектов деталей, что вполне соответствует ранее предложенному простейшему решению. Анализ значения введенной в строку матрицы **Y.5** искусственной переменной **S.5** показывает, что на автомате будет дополнительно обработано 609 деталей второго вида. Эти детали будут не комплектны. Для выполнения условия комплектности деталей

ПРИМЕР РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ДАТА 29-02-2004 ВРЕМЯ 11:40:26

MAXIMUM	ВВОДИМ : S.6	БАЗИС X : 6	ПЕРЕМЕН. : 8
ИТЕРАЦ : 10	ВЫВОД. : X.4	БАЗИС S : 2	Ф. ПЕР. : 5
ТОЧ. INV : 0	ОЦЕН. 25	RETURN 45500	ОГРАНИЧЕНИЙ: 8

BASIS	X.1	X.2	X.3	X.6	X.7	X.8
РЕШЕН.	56	7	63	21	1820	1820
ОЦЕН.	-1667	0	333.3	1.667	-1.667	61.7

Значение целевой функции

Объем выпуска деталей первого вида

Объем выпуска деталей второго вида

Рис. 7.5. Решение модифицированной задачи оптимальной загрузки оборудования в формате пакета PLP-2000

необходимо еще выпустить 609 деталей первого вида, что потребует дополнительного времени, или сбалансировать выпуска деталей обоих видов. Это потребует введения в модель ряда дополнительных ограничений. В модифицированной матрице модели представленной на рис. 7.4, этими ограничениями выступают строки **Y.4** и **Y.5** (ограничения по суммарному выпуску деталей) и строка **Y.8** (уравнение баланса деталей). Введение в ограничения модели отраженных переменных дает возможность получить суммарную величину выпуска деталей первого и второго вида обрабатываемых на различных

станках. При этом с помощью переменных **X.7** и **X.8** ограничений модели **Y.4** и **Y.5**, аккумулируется весь суммарный выпуск деталей, а с помощью ограничений **Y.6** и **Y.7** устанавливается возможный объем их выпуска – не менее 1820 деталей каждого вида. С помощью уравнения **Y.8** выполняется необходимое условие комплектности деталей первого и второго вида.

Результаты решения модифицированной задачи оптимальной загрузки оборудования (рис.7.5) показывают, что достижение необходимой комплектности обработки деталей на различных станках привело к снижению получаемой прибыли с 46515 грн. до 45500 грн. При этом предполагается обрабатывать по 1820 шт. деталей первого и второго видов, что соответствует наиболее выгодному варианту их производства представленному в таблице 7.2. Как и предыдущее решение, оно предполагает производить обработку деталей первого вида на трех револьверных станках, а деталей второго вида на автомате. Комплектность выпуска деталей при этом, достигается за счет сокращения времени на обработку деталей первого вида, и увеличения времени на обработку деталей второго вида на токарных станках.

Краткое повторение

- **Задача оптимизации загрузки оборудования цеха** – задача рационального распределения работ между установленным в цехе технологическим оборудованием и станками.
- **Комплектность выпуска деталей** – одно из условий обеспечения сбалансированного выпуска отдельных деталей для производства комплектных изделий.

§ 7.3. Оптимизация загрузки оборудования предприятия

Задача оптимизации загрузки оборудования предприятия

Эта задача приобретает особое значение для крупных предприятий (отраслей) с большим количеством структурных подразделений, где используется различное технологическое оборудование и способы

изготовления продукции, которые могут отличаться различными вариантами использования оборудования и станков.

Рассмотрим решение этой задачи на примере предприятия, которое состоит из нескольких цехов. Пусть на предприятии помимо цеха работу которого рассмотрено в предыдущем примере и который в дальнейшем будет именоваться как цех № 1, имеется еще цех № 2.

Таблица 7.3

Производительность станков цехов предприятия

Группы станков	Цех №1			Цех №2		
	Число станков	Суммарная производительность		Число станков	Суммарная производительность	
		I деталь	II деталь		I деталь	II деталь
Токарные	3	30	60	1	10	20
Револьверные	3	60	90	6	120	180
Автомат	1	30	80	1	30	80

В этом цеху работают один токарный станок, пять револьверных и один автомат, на которых производятся детали первого и второго видов. Полный перечень станков, которые работают в цехах нашего предприятия и их производительность приведены в таблице 7.3.

На предварительном этапе решения распределим имеющиеся ресурсы (на основе прошлого опыта) между двумя цехами. При этом

в цехе № 1 токарные и револьверные станки будут работать 63 дня, а автомат – 21 день. В соответствии с планом на них необходимо обработать 1617 комплектов деталей. В цехе № 2 токарный станок и автомат будут работать 21 день, револьверные станки – 126 дней. Планируемый объем выпуска деталей при этом, должен составить 2100 деталей первого вида и 2100 деталей второго вида.

Этапы решения задачи

Решим задачу оптимизации загрузки оборудования для каждого из цехов в отдельности. При этом, будет получено два решения для цехов № 1 и № 2. Решение задачи оптимизации загрузки оборудования цеха № 1 представлено на рис. 7.3. Из решения этой задачи видно, что прибыль предприятия от обработки 1617 комплектов деталей в цехе № 1 составляет 46515 грн. Значение искусственной переменной **S.5** показывает, что также будет дополнительно произведено 609 шт.

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф –Я: MAX						ПЕРЕМЕНН.: 11	ДАТА 29-02-2004
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ: 5						Ф. ПЕР.: 5	ВРЕМЯ 11:50:26
MAX	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	RHS	
RETURN	150	200	300	300	450	800	0	
Y.1	1	1					<= 21	
Y.2			1	1			<= 126	
Y.3					1	1	<= 21	
Y.4	10		20		30		>= 2100	
Y.5		20		30		80	>= 2100	

Рис. 7.6. Матрица модели оптимизации загрузки оборудования цеха № 2 в формате пакета PLP-2000

некомплектных деталей второго вида. Для обеспечения требований комплектности изделий, необходимо скорректировать производственную программу цеха № 1 в сторону возможного увеличения выпуска деталей первого вида и сокращения выпуска деталей второго

§ 7.3. Оптимизация загрузки оборудования предприятия

вида. Однако такого рода коррективы неизбежно приведут к уменьшению получаемой прибыли. Двойственные оценки показывают, что корректирование программы работы токарных станков, связанное с увеличением времени обработки деталей первого вида и сокращением времени деталей второго вида, приведет к потере величины получаемой прибыли в размере 5 грн (переменная X.1) для каждого дня работы станка. Наиболее целесообразным является изучение возможности кооперирования работы цехов №1 и №2. Для этого сначала решим локальную задачу оптимизации загрузки оборудования цеха № 2, матрица которой, представлена

ПРИМЕР РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ДАТА 29-02-2004 ВРЕМЯ 12:00:26

MAXIMUM ВВОДИМ : X.2 БАЗИС X : 4 ПЕРЕМЕН. : 6
 ИТЕРАЦ : 7 ВЫВОД. : S.1 БАЗИС S : 1 Ф. ПЕР. : 5
 ТОЧ. INV : 0 ОЦЕН. 200 RETURN 58800 ОГРАНИЧЕНИЙ: 5

BASIS	X.2	X.3	S.4	X.6	X.4
РЕШЕН.	21	126	420	21	0
DUAL	200	300	800	0	0



Рис. 7.7. Решение задачи оптимальной загрузки оборудования цеха № 2 в формате пакета PLP-2000

на рис. 7.6. Полученное решение (рис. 7.7) говорит о том, что производство 2100 комплектов деталей в цехе № 2 дает прибыль в размере 58 800 грн. Кроме того, будет дополнительно изготовлено 420 шт. не комплектных деталей первого вида. В связи с этим, имеет смысл объединить усилия обеих цехов. Для этого построим блочную матрицу модели оптимизации загрузки оборудования с общей целевой функцией, где каждый цех будет представлен как отдельный блок. Общими будут также ограничения по выпуску деталей первого и второго видов. Ограничения времени работы станков для каждого

Глава 7 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАГРУЗКИ МОЩНОСТЕЙ

из блоков задаются в отдельности, что обусловлено особенностями размещения оборудования.

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-Я:	МАХ	ПЕРЕМЕН.:	16	ДАТА	29-02-2004											
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ:	5	Ф. ПЕР.:	8	ВРЕМЯ	12:10:26											
МАХ	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	X.9	X.10	X.11	X.12	X.13	X.14	X.15	X.16	RHS
RETURN	150	200	300	300	450	800	150	200	300	300	450	800					0
Y.1	1	1															<= 63
Y.2			1	1													<= 63
Y.3					1	1											<= 21
Y.4	10	20	30										-1				= 0
Y.5		20	30	80										-1			= 0
Y.6					1	1											<= 21
Y.7							1	1									<= 84
Y.8									1	1							<= 42
Y.9					10	20	30						-1				= 0
Y.10						20	30	80								-1	= 0
Y.11									1	1							>= 4137
Y.12											1	1					>= 4137
Y.13									1	1	-1	-1					= 0

Блок матрицы модели цеха № 1

Блок матрицы модели цеха № 2

Общие ограничения по выпуску деталей первого вида
 $1617 + 2100 + 420 = 4137$

Общие ограничения по выпуску деталей второго вида
 $1617 + 2100 + 420 = 4137$

Ограничение баланса выпуска деталей

Рис. 7.8. Матрица модели оптимизации загрузки оборудования на предприятии в формате пакета PLP-2000

Матрица модели оптимизации загрузки оборудования представлена на рис. 7.8. Матрица состоит из двух блоков нормативных коэффициентов обработки деталей в цехов №1 и №2, ограничений

§ 7.3. Оптимизация загрузки оборудования предприятия

времени работы станков и общих ограничений выпуска деталей. Количество комплектов деталей рассчитывалось как суммарное число обрабатываемых деталей цехом № 1 и цехом № 2 с учетом получения некомплектных изделий. Результаты произведенных расчетов

ПРИМЕР РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ДАТА 29-02-2004 ВРЕМЯ 12:20:26

MAXIMUM ВВОДИМ : X.1 БАЗИС X : 12 ПЕРЕМЕН. : 16
 ИТЕРАЦ : 19 ВЫВОД : X.5 БАЗИС S : 1 Ф. ПЕР. : 8
 ТОЧ. INV : 0 ОЦЕН. 37.5 RETURN 104090 ОГРАНИЧЕНИЙ: 13

BASIS	X.1	X.9	X.15	S.11	X.6	X.7	X.2	X.3	X.11	X.12
X.14	X.16	X.13								
РЕШЕН.	4.083	126	2880	44	21	21	58.92		5.017	15.98
2858	1279	1301								
DUAL	166.7	333.3	666.7	-1.667	1.667	133.3	266.7	400	667	5
0	3.333	-1.667								

Значение искусственной переменной

Величина прибыли

Рис. 7.9. Решение задачи оптимальной загрузки оборудования предприятия в формате пакета PLP-2000

рис. 7.9 показывают, что оптимизация загрузки оборудования двух цехов дала возможность увеличить выход комплектов деталей до 4137 шт. Количество производимых деталей рассчитывалось как суммарная величина комплектов деталей выпускаемых цехами №1 и №2 ($1617 + 2100 = 3717$). При этом учитывалось также количество не комплектных деталей второго и первого видов выпускаемых цехом №1 и цехом №2. Расхождения в комплектности изделий по предприятию для решаемых локальных задач первоначально составляло 189 шт. деталей второго вида ($609 - 420 = 189$). С учетом этого была определена окончательная величина выпуска комплектов деталей 4137 шт. ($1617 + 2100 + 420 = 4137$). Значение искусственной переменной **S.11** говорит о том, что не комплектность изделий в целом сократится до 44 шт. Суммарная величина прибыли полученная предприятием будет составлять 104090 грн.

Краткое повторение

- ❑ **Задача оптимизации загрузки оборудования предприятия** – задача рационального распределения работ между цехами предприятия.
- ❑ **Блочная матрица оптимизации загрузки оборудования** – объединенная матрица локальных задач рационального распределения работ на предприятии.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

блочная матрица загрузки оборудования
взаимозаменяемость оборудования
комплектность выпуска деталей
невзаимозаменяемость оборудования

оптимизация загрузки оборудования
оптимизация загрузки предприятия
оптимизация загрузки цеха

Контрольные вопросы и задания



1. Что представляет собой оптимизация загрузки оборудования?
2. Чем определяется масштаб решения этой задачи?
3. Задача оптимизации загрузки оборудования Л.В. Канторовича.
4. Формализация и решение задачи Л.В. Канторовича.
5. Этапы решения задачи оптимизации загрузки оборудования.
7. Прочитайте примеры задач на компьютере.

Глава

8

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

В этой главе рассмотрены важнейшие аспекты оптимального распределения лимитированных ресурсов. Показано, что эффективность использования этих ресурсов зависит не только от их количества, но также их распределения по разным направлениям (разным видам работ, технологическому применению).

§ 8.1. Оптимальное распределение ресурсов

Задача распределения ресурсов

Оптимальное распределение ресурсов – это одна из наиболее трудных и сложных задач совершенствования организации и управления промышленного производства. Распределение сырья, материалов, топлива, электроэнергии, воды, финансовых средств, оборудования, транспорта, рабочей силы, машинного времени и т. д. – все это задачи распределения ресурсов.

Важность решения этих задач определяется тем, что в каждый данный момент времени количество требуемых ресурсов является ограниченным. При этом, все ресурсы которые используются в процессе производства принято делить на невозпроизводимые и воспроизводимые. К невозпроизводимым ресурсам, относят разрабатываемые запасы природных ископаемых, уголь, нефть, газ. К воспроизводимым – машины, станки, технологическое оборудование, материалы, производственные кадры.

Общепринятой классификации ресурсов сейчас не существует. Можно указать лишь на то, что в экономико-математическом моделировании принято рассматривать следующие виды ресурсов:

природные (земельные и водные ресурсы, воздушная атмосфера, космос);

сырьевые и энергетические (железная и марганцевая руда, медь, никель, алюминий, уголь, нефть, газ и т. д.);

средства производства (производственные мощности);

трудовые (население и его отдельные профессиональные группы в зависимости от специальности и уровня квалификации);

финансовые (капитальные вложения, кредиты и др.).

Ресурс – одно из широко распространенных общих понятий, используемых в экономико-математическом моделировании, в связи с ограниченностью возможностей материально-вещественной стороны производства.

Несмотря на ограниченность ресурсов, не во всех, а только части их, производство испытывает острый недостаток. Их обычно называют дефицитными (в отличие от тех ресурсов, которые не лимитируют данное производство). Относительная дефицитность ресурсов, при этом может быть изменена не только в динамике, но частично и в статике за счет рационального их распределения.

**Взаимо-
заменяемость
ресурсов**

Возможность взаимозаменяемости ресурсов – это выбор варианта замены одного ресурса другим. Если нет заменяемости, нет и выбора. Это определяет возможность принятия различных вариантов организационно-технологических решений развития производства, повышения его эффективности.

Для того, чтобы обеспечить промышленность конструкционными материалами, можно увеличить выплавку металла, сократить его отходы, или увеличить производство пластмасс (в конечном счете обычно принимается вариант, в том или ином соотношении использующий все эти пути).

Обеспечить потребность страны в электрической энергии можно путем строительства гидростанций, тепловых и атомных станций, но можно использовать часть инвестиций в совсем ином направлении: сокращении потерь при передаче электроэнергии, в совершенствовании электропечей и электродвигателей, бытовой электротехники. В каждом случае необходимо найти оптимальный вариант. Поэтому модели и методы расчетов для определения эффективности взаимной замены одних ресурсов другими имеют большое значение.

При этом, различают технологическую и экономическую взаимозаменяемость ресурсов. Не всякие ресурсы взаимозаменяемы технологически, могут быть заменены в производстве с экономической точки зрения.

Технологическая заменяемость ресурсов

Эффективность использования ресурсов в зависимости от распределения их по разным направлениям (разным работам, технологическому применению, конечному использованию) может быть различной. Возможности использования ресурсов еще более возрастают в связи с технологической их заменяемостью на всех стадиях процесса производства. При этом выделяются следующих три возможности технологической заменяемости ресурсов:

один ресурс – разные способы использования. Примерами этого может служить использование леса как строительного материала и сырья для бумажной промышленности, а также нефти как исходного продукта для получения горюче-смазочных материалов и сырья для химической промышленности;

различные ресурсы – одно целевое назначение. Например: использование торфа, угля, нефти и газа для получения электрической энергии на тепловых электростанциях. Сюда же можно добавить и использование обогащенного урана как топлива в ядерной энергетике;

разное во времени использование ресурсов. Примерами чему являются разные сроки освоения природных ресурсов; введения в строй промышленных мощностей; инвестирования в производство.

Технологическая взаимозаменяемость ресурсов и множественность возможных способов производства продукции являются основой нахождения оптимизационных решений.

Краткое повторение

- ❑ **Распределение ресурсов** – распределение сырья, материалов, топлива, электроэнергии, воды, финансовых средств, оборудования, транспорта, рабочей силы.
- ❑ **Взаимозаменяемость ресурсов** – это выбор возможного варианта замены одного ресурса другим.
- ❑ **Технологическая заменяемость ресурсов** – возможность замены ресурса на всех стадиях процесса производства.

§ 8.2. Распределение ресурсов внутри цеха

**Модель
внутрицехового
распределения
ресурсов**

Рассмотрим экономико-математическую модель распределения лимитированных ресурсов внутри цеха. Эта модель дает возможность для нахождения оптимального варианта распределения ресурсов, между отдельными технологическими процессами (технологическими способами). При этом предполагается, что

§ 8.2. Распределение ресурсов внутри цеха

каждый из заданных в модели технологических способов, дает возможность получения какого-либо одного вида продукции. Объем потребляемых ресурсов и количество выпускаемой продукции ограничены. Для формализации модели внутрицехового распределения лимитированных ресурсов между отдельными технологическими способами производства введем ряд следующих обозначений:

- j – технологический способ производства продукции;
- n – число технологических способов производства;
- i – вид ресурсов;
- m – число видов ресурсов;
- Ψ_i^l – количество выделенных цеху l ресурсов вида i ;
- a_{ij} – нормативный коэффициент затрат ресурсов i на выпуск продукции с использованием технологического способа производства j ;
- c_j – прибыль от выпуска единицы продукции полученной с использованием технологического способа производства j ;
- x_j^l – количество продукции, получаемой по технологическому способу производства j в цехе l .

Математическая модель. Используя имеющиеся ресурсы, количество которых ограничено, найти оптимальные значения x_j^l

$$\sum_{j=1}^{n_l} a_{ij} x_j^l \leq \Psi_i^l \quad i = \overline{1, m}, \quad (8.1)$$

позволяющие получить максимальную прибыль

$$\sum_{j=1}^{n_l} c_j x_j^l \rightarrow \max, \quad (8.2)$$

при условии неотрицательности переменных

$$x_j^l \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (8.3)$$

Постановка и решение задачи внутрицехового распределения ресурсов

Кожевенный завод специализируется на производстве кожевенных материалов, которые используются для изготовления обуви. В цехе № 6 кожевенного завода выполняется ряд технологических операций, связанных с переработкой дубленого полуфабриката «WET-BLUE» в готовый продукт. В соответствии с используемой технологией, здесь выполняются необходимые операции для получения хромовых кож, юфти, нубука и шевро. Лимиты дефицитных ресурсов выделенных цеху № 6 составляют: дубленый полуфабрикат – 21200 м²; хромовый дубитель – 3666 кг и кальцинированной соды – 63 кг; вода – 235 м³. Известно, что прибыль получаемая заводом от

Таблица 8.1

Нормативные расходы на производство продукции

Производимая продукция	Нормативные расходы на один м ² выпускаемых кожевенных материалов		
	Хромовый дубитель, кг	Кальцинированная сода, кг	Вода, м ³
Хромовая кожа	0,57	0,006	0,0125
Юфть	0,008	0,0008	0,01
Нубук	0,039	0,004	0,0125
Шевро	0,012	0,0008	0,01

выпуска одного м² кожевенных материалов составляет: хромовые кожи – 45 грн, юфть – 50 грн, нубук – 60 грн и шевро – 55 грн. Нормативные коэффициенты расходов химических реагентов и воды на производство продукции приведены в табл. 8.1. При этом планируется получить: хромовых кож – 5800 м², юфти – 5500 м², нубука – 5000 м² и шевро – 4300 м². Целью решения задачи

§ 8.2. Распределение ресурсов внутри цеха

является нахождение оптимального варианта переработки дубленого полуфабриката «WET-BLUE» в конечный продукт, позволяющего получить максимальную прибыль.

Формализация этой задачи и решение с помощью методов линейного программирования неизменно предполагает необходимость построения матрицы модели (рис. 8.1). Количество вектор-столбцов

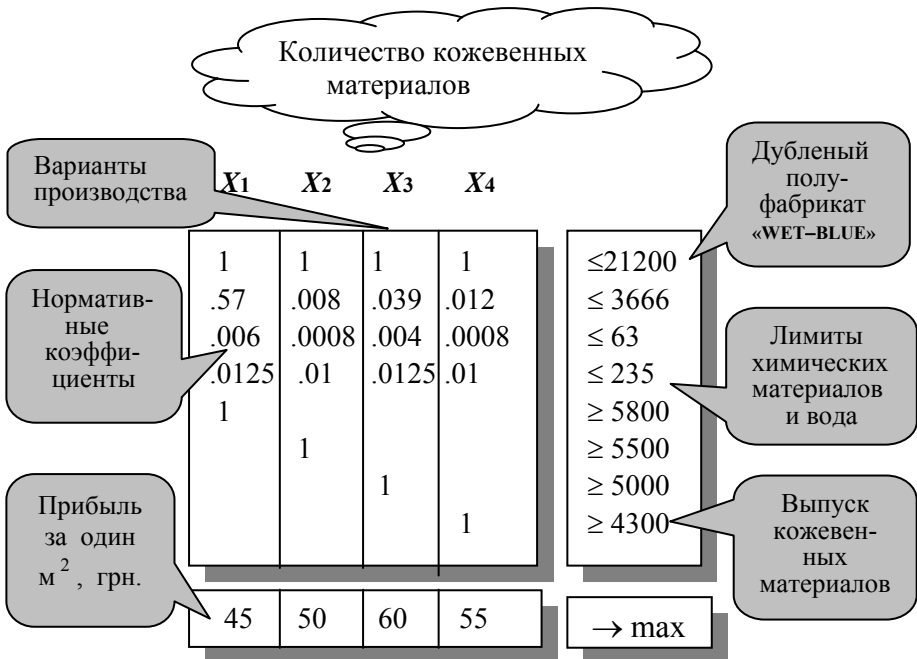


Рис. 8.1. Матрица модели оптимального распределения ресурсов в цехе №6 кожевенного завода

матрицы модели будет определяться числом альтернативных вариантов переработки дубленого полуфабриката в конечный продукт. Из условий задачи видно, что таких вариантов четыре. Они, в свою очередь, определяют возможность производства таких кожевенных материалов, как хром, юфть, нубук и шевро. Ограничениями матрицы

модели будет выступать задаваемая система неравенств затрат полуфабриката, расходуемых химических материалов, воды, лимиты которых ограничены и выпуска кожевенных материалов. Числовыми коэффициентами матрицы модели будут служить нормативные вели-



Рис. 8.2. Матрица модели распределения ресурсов в цехе № 6 в формате пакета PLP-2000

чины затрат и выпуска продукции. В качестве одного из приемов при формализации реализуемых в модели функциональных зависимостей используется введение коэффициентов пропорциональности для оптимального распределения дублированного полуфабриката между

§ 8.2. Распределение ресурсов внутри цеха

отдельными технологическими способами производства. Полностью в построенном виде матрица модели внутрицехового распределения ресурсов показана на рис. 8.1. Целевая функция матрицы модели максимизирует величину получаемой прибыли. Коэффициентами

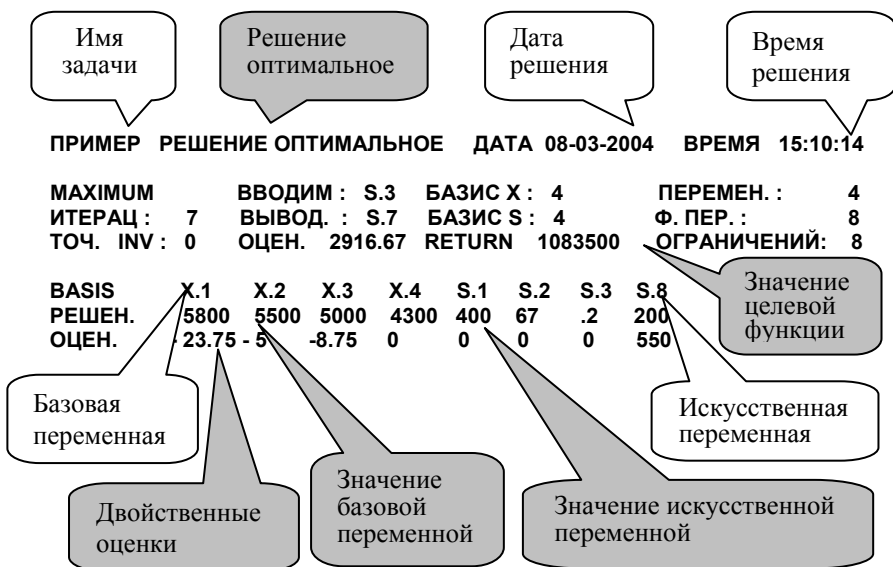


Рис. 8.3. Решение задачи распределения ресурсов в цехе № 6 в формате пакета PLP-2000

целевой функции является величина получаемой прибыли от выпуска одного м² кожевенных материалов.

Результаты расчетов показывают, что решение задачи внутрицехового перераспределения лимитированных ресурсов обеспечивает получение прибыли в размере 1 083 500 грн. При этом будет полностью выполнено задание по производству дубленых материалов: хромовых кож, юфти, нубука и шевро. Значение искусственных переменных дает возможность заключить, что количество дубленого полуфабриката, который не будет переработан составит 400 м² (переменная S.1). Останется также не использованным 67 кг хромового

дубителя (значение переменной **S.2**) и 0,20 кг кальцинированной соды (значение переменной **S.3**). Анализ двойственных оценок показывает, что увеличение производства хромовых кож по сравнению с намеченным количеством, приведет к снижению величины получаемой прибыли.

Задача решалась с помощью усовершенствованного алгоритма модифицированного симплекс-метода с мультипликативной формой представления обратной матрицы. Одной из важнейших особенностей этого метода является разбиение процесса итерационных вычислений на две отдельные фазы: введения искусственных переменных и нахождения базисного решения; использования двойственных оценок для выбора входящих в базис переменных. Матрица модели задачи внутрицехового распределения ресурсов в формате пакета PLP-2000 с ссылками и необходимыми пояснениями, представлена на рис. 8.2. Двойственные оценки показывают, что увеличение выпуска хромовых кож сверх установленного задания нецелесообразно, так как это приведет к уменьшению величины получаемой прибыли (оценка переменной **X.1**) на 23,75 грн. для каждого дополнительно произведенного квадратного метра продукции. Это также относится и к производимой юфти (оценка переменной **X.2**) увеличение выпуска единицы которой вызовет уменьшение прибыли на 5 грн. и нубука (оценка переменной **X.3**) на 8,75 грн. В этой связи, наиболее целесообразным представляется увеличение производства шевро (оценка переменной **X.4**), рост выпуска которого, может осуществляемого без каких-либо потерь прибыли (рис. 8.3).

Краткое повторение

- ❑ **Модель внутрицехового распределения ресурсов** – модель оптимального распределения ресурсов, между отдельными технологическими процессами (технологическими способами) внутри цеха.
- ❑ **Искусственные переменные** – переменные, которые показывают количество не используемых ресурсов или количество той продукции, которую можно выпустить сверх плана.
- ❑ **Двойственные оценки** – оценки продуктов, ресурсов, работ, вытекающие из условий решаемых оптимизационных задач.

§ 8.3. Распределение ресурсов на предприятии

**Двухуровневая
модель
распределения
ресурсов**

Распределение лимитированных ресурсов между цехами осуществляется с учетом производственных потребностей всех структурных подразделений предприятия и возможностей их удовлетворения. Сложность решения этой задачи, в свою очередь, обуславливает необходимость ее постановки в виде двухуровневой модели. Модель задачи распределения ресурсов разделяется на две подзадачи, решаемые на верхнем и нижнем уровнях.

Математическая модель задачи внутрицехового распределения ресурсов для каждого из l цехов $l = \overline{1, L}$ предприятия определяется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n_l} a_{ij} x_j^l \leq \Psi^l_i, \quad l = \overline{1, L}; \quad i = \overline{1, m}; \quad (8.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n_l} c_j x_j^l \rightarrow \max; \quad (8.5)$$

$$x_j^l \geq 0, \quad l = \overline{1, L}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (8.6)$$

Математическая модель задачи верхнего уровня распределения ресурсов на предприятии между цехами имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^L \Psi_i^l \leq b_i, \quad l = \overline{1, L}; \quad i = \overline{1, m}; \quad (8.7)$$

$$\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^m q_i^l \Psi_i^l \rightarrow \max; \quad (8.8)$$

$$\Psi_i^l \geq 0, \quad l = \overline{1, L}; \quad i = \overline{1, m}. \quad (8.9)$$

Задача, верхнего уровня и задачи нижнего уровня, взаимосвязаны между собою. Согласование решений задачи верхнего уровня

(8.7) – (8.9) и задач нижнего уровня (8.4) – (8.6) осуществляется следующим образом: сначала каждому цеху $l = 1, L$ выделяется некоторый объем лимитированных ресурсов $\Psi_l^l \geq 0$. После этого решаются локальные задачи (8.4) – (8.6). Двойственные оценки соответствующих ограничений этих задач характеризуют эффективность этого варианта распределения ресурсов. Получив эти оценки, делаем необходимую корректировку распределения ресурсов, для чего уже решается задача верхнего уровня (8.7) – (8.9). Решение такой задачи носит весьма простой экономический смысл и состоит в том, что из имеющихся у предприятия ресурсов b_i некоторая часть выделяется тому цеху, для которого оценка эффективности использования ресурса q_i^l максимальна. Если же несколько цехов используют данный ресурс с одинаковой эффективностью, то он может быть выделен любому из них.

Основная идея использования двойственных оценок для наиболее рационального распределения дефицитных ресурсов между цехами предприятия заключается в следующем. Предположим, что из прошлого опыта или иных соображений составлен первоначальный план распределения ресурсов. Естественно, возникает вопрос о возможности его улучшения. Для ответа на него необходимы ориентиры (оценки), указывающие на оптимальность или неоптимальность этого плана распределения. В качестве таких оценок могут быть приняты двойственные оценки, полученные в результате решения локальных задач оптимизации работы каждого из цехов предприятия с учетом первоначального распределения ресурсов между ними. Так, если для некоторого ресурса его оценки хотя бы для двух цехов различны, то правильнее этот ресурс перераспределить между этими цехами. При этом может быть несколько «ухудшено» значение целевой функции для цеха, у которого часть ресурса изымается, и «улучшено» у цеха, которому этот ресурс передается. Общий эффект станет выше.

Для решения вопроса о количестве перераспределяемого ресурса модели матрицы локальных задач объединяются в одну матрицу с общей целевой функцией и объединенными ограничениями по распределяемым ресурсам. В результате решения объединенной задачи и будет получено наилучшее перераспределение дефицитных ресурсов между цехами. Затем вновь общая матрица модели разведывается на отдельные локальные задачи, при этом правые части ограничений изменяются в соответствии с произведенным перераспределением ресурсов и т. д. Процесс продолжается до

§ 8.3. Распределение ресурсов на предприятии

полного уравнивания значений двойственных оценок на одноименные ресурсы для всех цехов предприятия.

Эффективность менеджмента (системный эффект эмерджентности) при этом, может быть охарактеризована достаточно однозначно: как результат оптимального (равновесного) распределения ресурсов на предприятии между отдельными цехами.

Постановка и решение задачи распределения ресурсов на предприятии

На кожевенном заводе производство кож из дубленого полуфабриката сконцентрировано в двух специализированных цехах. Распределение дубленого полуфабриката «WET-BLUE» на заводе между цехами №6 и №7 осуществляется по предварительно составленному плану. Согласно этому плану, цеху № 6 было выделено $21\,200\text{ м}^2$, а цеху №7 – $20\,000\text{ м}^2$ дубленого полуфабриката. Двум цехам предприятия для производства кожевенных материалов было также соответственно выделено по 3666 и 2688 кг хромового дубителя, 63 и 64 кг кальцинированной соды, а также 235 и 235 м^3 воды. Этим же планом было определено, что цеха № 6 и № 7 должны произвести 5800 и 4000 м^2 хромовых кож, 5500 и 4000 м^2 юфти, 5000 и 8000 м^2 нубука, а также 4300 и 4000 м^2 шевро. Прибыль от производства продукции должна быть максимальной. Нормативные коэффициенты затрат химических материалов и расхода воды на один м^2 готовой продукции те же, что и использовались для расчетов ранее, приведены в табл. 5.1.

Для решения задачи оптимального распределения ресурсов на предприятии, вначале необходимо решить задачи распределения лимитированных ресурсов внутри цехов. Результаты решения задачи распределения ресурсов в цехе № 6 кожевенного завода были получены в предыдущем параграфе. Оптимизационная задача распределения лимитированных ресурсов в цехе № 7 решалась аналогичным образом. Было внесено только ряд изменений в ограничения модели. Измененная матрица модели распределения ресурсов с внесенными коррективами, представлена на рис. 8.4. Результаты решения задачи показали, что прибыль от выпуска кожевенных материалов цехом № 7 составит $1\,080\,000$ грн. Это не намного меньше, чем прибыль, полученная по цеху № 6, которому было выделено больше дубленого полуфабриката, часть которого

осталась не использованной. В то же время, результаты решения задачи для цеха № 7 показывают, что не использованным остаются 16 кг хромового дубителя (переменная **S.2**), 1,6 кг кальцинированной соды (переменная **S.3**) и 5 м³ воды (переменная **S.4**). Это наталкивает

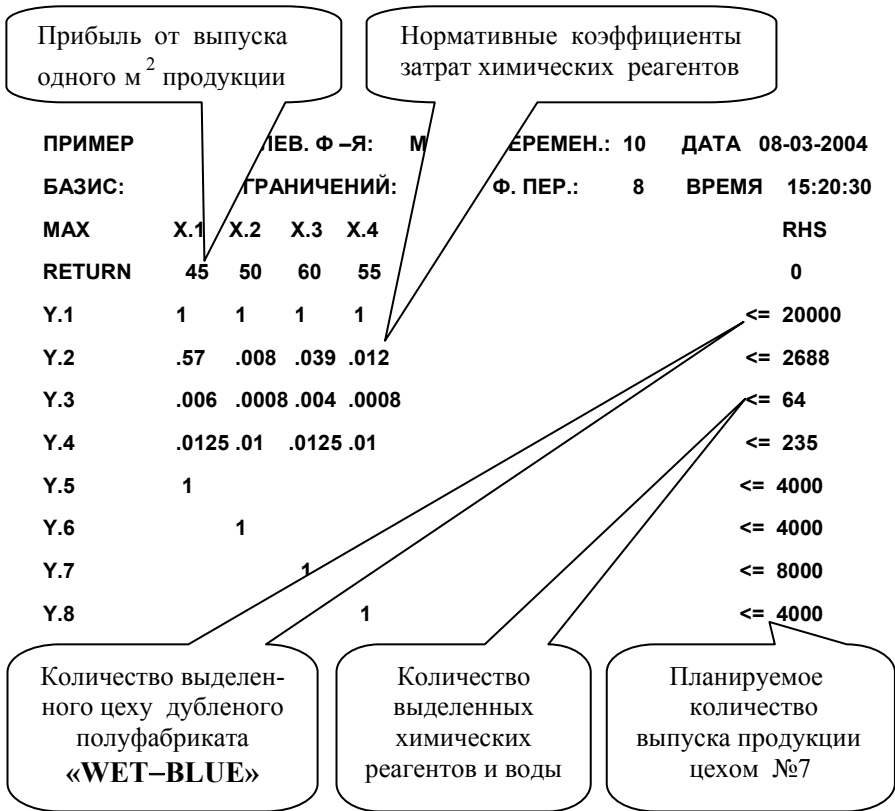


Рис. 8.4. Матрица модели распределения ресурсов в цехе № 7 в формате пакета PLP-2000

на мысль о том, что если перераспределить лимитированные ресурсы между цехами, то можно будет не только увеличить выпуск кожевенных материалов, но и повысить получаемую прибыль. Для

§ 8.3. Распределение ресурсов на предприятии

этого необходимо решить задачу оптимального распределения ресурсов между цехами (рис. 8.5). Объединенная матрица модели распределения ресурсов на предприятии имеет блочный вид, где блоками служат матрицы нормативных коэффициентов отдельных решаемых локальных задач. Общими являются ограничения лимитированных ресурсов и целевая функция. Блочная матрица модели оптимального

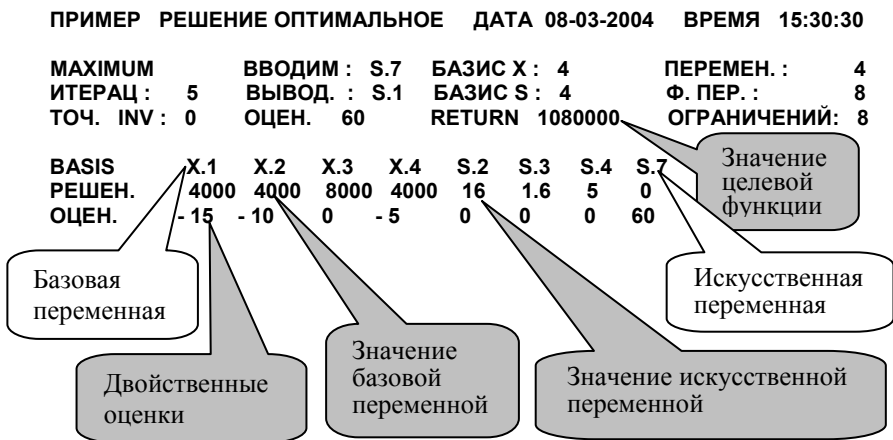


Рис. 8.5. Решение задачи распределения ресурсов в цехе № 6 в формате пакета PLP-2000

распределения ресурсов на предприятии представлена на рис. 8.6. Кроме двух основных блоков нормативных коэффициентов затрат и выпуска продукции цеха № 6 и цеха № 7, матрица содержит также связующий блок коэффициентов. Введение в матрицу модели дополнительного связующего блока, обусловлено необходимостью перераспределения на предприятии части неиспользуемого ресурса между цехами. С этой целью, по результатам решения локальных задач, были предварительно скорректированы ограничения количества выделенных ресурсов. В частности, было уменьшено количество выделенного цеху № 6 дубленого полуфабриката на $(21\,200 - S.1 = 20\,800)$ на 400 м^2 , а также хромового дубителя $(3\,666 - S.2 = 3\,599)$ на 67 кг и кальцинированной соды $(63 - S.3 = 62,8)$ на $0,2\text{ кг}$. Также было

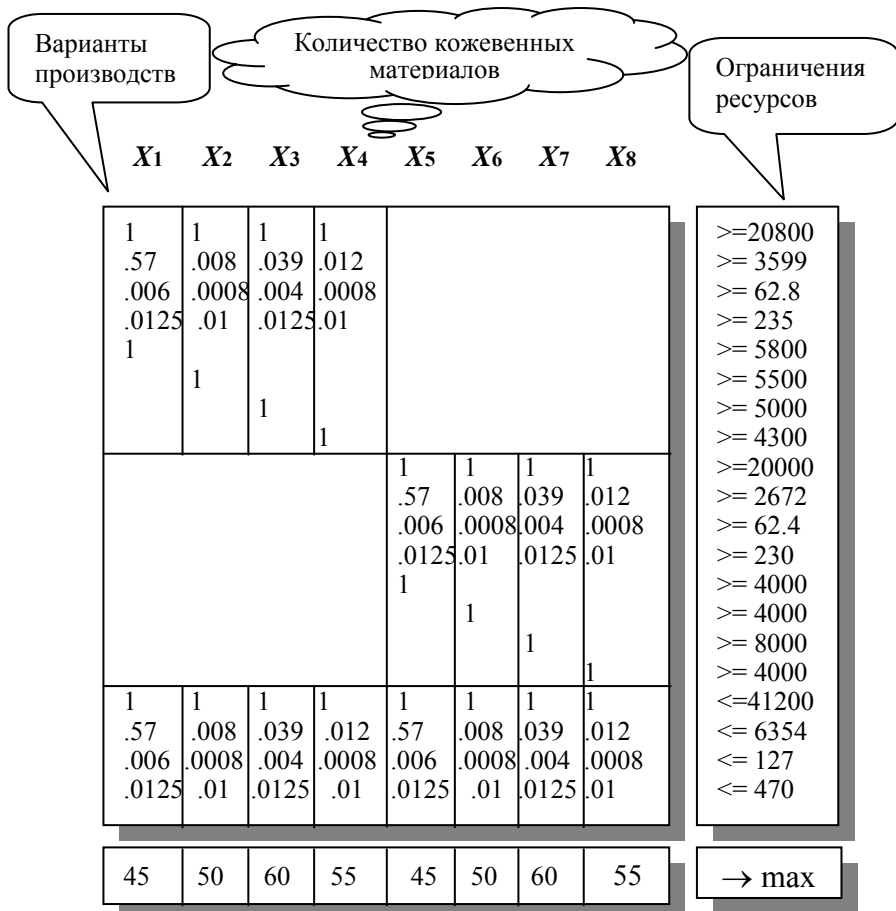


Рис. 8.6. Матрица модели распределения ресурсов на предприятии

уменьшено количество выделенного цеху № 7 хромового дубителя ($2688 - \mathbf{s.2} = 2672$) на 16 кг, кальцинированной соды ($64 - \mathbf{s.3} = 62,4$) на 1,6 кг и воды ($235 - \mathbf{s.4} = 230$) на 5 м³. Модель построена таким образом, что часть неиспользуемых ресурсов может быть перераспределена между цехами. Для этого был специально введен связующий блок (ограничения $\mathbf{Y.17} - \mathbf{Y.19}$). Ограничения этого блока

§ 8.3. Распределение ресурсов на предприятии

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф –Я: МАХ								ПЕРЕМЕН.: 10	ДАТА 08-03-2002
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ: 8								Ф. ПЕР.: 8	ВРЕМЯ 15:20:30
МАХ	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	RHS	
RETURN	45	50	60	55	45	50	60	55	0	
Y.1	1	1	1	1					>= 20800	
Y.2	.57	.008	.039	.012					>= 3599	
Y.3	.006	.0008	.004	.0008					>= 62.8	
Y.4	.0125	.01	.0125	.01					>= 235	
Y.5	1								>= 5800	
Y.6		1							<= 5500	
Y.7			1						<= 5000	
Y.8				1					<= 4300	
Y.9					1	1	1	1	>= 20000	
Y.10					.57	.008	.039	.012	<= 2672	
Y.11					.006	.0008	.004	.0008	<= 62.4	
Y.12					.0125	.01	.0125	.01	<= 230	
Y.13					1				<= 4000	
Y.14						1			<= 4000	
Y.15							1		<= 8000	
Y.16								1	<= 4000	
Y.17	.57	.008	.039	.012	.57	.008	.039	.012	<= 6354	
Y.18	.006	.0008	.004	.0008	.006	.0008	.004	.0008	<= 127	
Y.19	.0125	.01	.0125	.01	.0125	.01	.0125	.01	<= 470	
Y.20	1	1	1	1	1	1	1	1	<= 41200	

Блок нормативных коэффициентов цеха №6

Блок нормативных коэффициентов цеха №7

Связующий блок

Рис. 8.7. Матрица модели распределения ресурсов на предприятии в формате пакета PLP-2000

были увеличены на величину перераспределяемого ресурса: дубленого полуфабриката на 400 м^2 , хромового дубителя на 83 кг, кальцинированной соды на 1,8 кг и воды 5 м^3 .

Решение задачи оптимального распределения ресурсов на предприятии между цехом №6 и цехом №7 дает прирост прибыли ($21\ 87500 - 21\ 63500 = 2\ 4000$) на 24 000 грн. Резервом увеличения величины получаемой прибыли на предприятии, может стать рост объемов переработки дубленого полуфабриката цехом №7 на 400 м^2 . Этот дубленый полуфабрикат планируется направить на производство 400 м^2 нубука, что даст дополнительную прибыль в

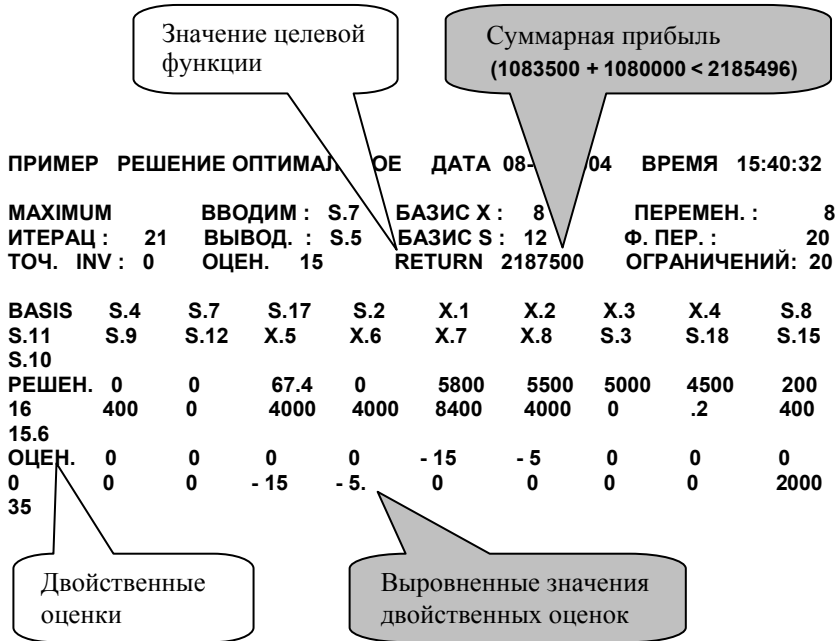


Рис. 8.8. Решение задачи распределения ресурсов на предприятии в формате пакета PLP-2000

размере 24 000 грн. Анализ двойственных оценок (рис. 8.8) показал, что решение задачи оптимального распределения ресурсов на предприятии позволяет уравнивать значения двойственных оценок одноименных ресурсов, которые используются двумя цехами.

Краткое повторение

- Распределение ресурсов на предприятии – задача оптимального распределения ресурсов между производственными цехами.

- **Двухуровневая оптимизационная модель** – модель распределения лимитированных ресурсов, которая решается на нижнем и верхнем уровнях.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

блочная матрица распределения ресурсов
взаимозаменяемость ресурсов
внутрицеховое распределение ресурсов
двухуровневая оптимизационная модель

распределение ресурсов
распределение ресурсов на предприятии
технологическая заменяемость
экономическая заменяемость

Контрольные вопросы и задания



1. Что представляет собой задача распределения ресурсов?
2. Что такое взаимозаменяемость ресурсов?
3. Что такое технологическая заменяемость ресурсов?
4. Модель внутрицехового распределения ресурсов.
5. Особенности постановки и решение локальных задач внутрицехового распределения ресурсов.
6. Двухуровневая оптимизационная модель распределения ресурсов на предприятии.
7. Оптимальное распределение ресурсов на предприятии. Особенности постановки и решения задачи.
8. Этапы решения задачи распределения лимитированных ресурсов на предприятии между цехами.
9. Прочитайте примеры задач на компьютере.



Раздел V

Моделирование размещения и развития производства

✓ Глава 9 *Моделирование размещения производства*

§ 9.1. Моделирование размещения предприятия

§ 9.2. Модель многоэтапного размещения производства

§ 9.3. Модель размещения многопрофильного производства

✓ Глава 10 *Моделирование развития производства*

§ 10.1. Моделирование альтернатив развития

§ 10.2. Модель инвестирования в развитие производства

§ 10.3. Модель инвестирования в развитие отрасли

Глава

9

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

В этой главе освещен ряд важнейших вопросов моделирования размещения предприятий, оптимизации мощностей и транспортных потоков. Представлена модель многоэтапного размещения производства. Дана модель размещения многопрофильного производства, которое ориентированно на выпуск различных видов продукции.

§ 9.1. Моделирование размещения предприятия

Оптимальность вариантов размещения предприятия

При решении вопросов оптимизации размещения производства ставится задача пространственного определения перспектив его развития, выбора места строительства новых предприятий или реконструкции уже действующих, определения масштабов вы-

пуска продукции. В условиях промышленного производства проблема размещения возникает при решении вопросов строительства, расширения того или иного предприятия или цеха, ликвидации или свертывания производства, изменения его специализации.

На размещение предприятий оказывает влияние множество различных факторов. Важнейшими из них являются: природные условия – климат, полезные ископаемые, лесные и водные ресурсы; обеспеченность рабочей силой, численность и квалификация работающих; уровень развития техники и технологий; транспортные условия – протяженность транспортной сети, ее охват всей территории и др.

Выбор места строительства или реконструкции предприятия без учета этих факторов может осложнить обеспечение предприятия сырьем, электрической энергией, газом, трудовыми ресурсами, вызвать дополнительные трудности в доставке сырья и отгрузке готовой продукции, увеличить транспортные затраты.

**Вариантная
модель
размещения
предприятия**

Намечено ряд мест, где можно произвести реконструкцию или расширение действующих предприятий или осуществить новое строительство для производства требуемой продукции. Необходимо определить величину оптимальной мощности размещаемых предприятий с учетом дискретного изменения варианта производственной мощности. Для построения экономико-математической модели задачи введем следующие обозначения:

- i – номер предприятия;
- m – число всех предприятий;
- j – номер потребителя;
- n – число всех потребителей;
- q – номер варианта размещения предприятия;
- u_i – число всех вариантов размещения i предприятия;
- N_{iq} – мощность предприятия i , производящего продукцию в соответствии с вариантом q ;
- A_i – объем поставок продукции i ;
- Q_{iq} – затраты на выпуск единицы продукции на предприятии i в соответствии с вариантом q ;
- C_{ij} – стоимость перевозки единицы с предприятия i потребителю j ;
- x_{iq} – переменная величина, равна 1, если на предприятии i выбран вариант размещения q , и равна 0, если на предприятии i не выбирается вариант развития q ;
- x_{ij} – объем перевозок продукции от предприятия i к потребителю j .

Математическая модель. Найти оптимальный вариант размещения предприятия, позволяющий минимизировать затраты на производство

$$\sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^{u_i} Q_{iq} N_{iq} x_{iq} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (9.1)$$

§ 9.1. Моделирование размещения предприятия

при ограничениях: на производство продукции

$$\sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^{u_i} N_{iq} x_{iq} \geq \sum_{i=1}^m x_{ij}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (9.2)$$

на потребление продукции

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq A_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (9.3)$$

на выбор варианта

$$\sum_{q=1}^{u_i} x_{iq} \leq 1, \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.4)$$

и неотрицательности переменных

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (9.5)$$

Пример задачи размещения предприятия

Строительство кожевенного завода в регионе предполагает выбор одного из трех возможных вариантов размещения проектируемого предприятия мощностью 20025 м² хромовых кож. Потребителями продукции кожевенного завода будут три обувных фабрики, потребность которых составляет: $A_1 = 10000$ м²; $A_2 = 5025$ м²; $A_3 = 5000$ м². Каждый из предлагаемых вариантов размещения предприятия отличается от других затратами на выпуск единицы продукции и стоимостью перевозок. Затраты на выпуск единицы продукции в зависимости от варианта размещения составляют: $q_1 = 5,1$ грн; $q_2 = 5,6$ грн; $q_3 = 6,2$ грн. Стоимость перевозки одного м² хромовых кож от кожевенного завода к обувной фабрике в зависимости от выбираемого варианта соответственно составляет: $c_{11} = 1,2$ грн; $c_{12} = 1,3$ грн; $c_{13} = 1,4$ грн; $c_{21} = 0,9$ грн; $c_{22} = 1,1$ грн; $c_{23} = 1,2$ грн; $c_{31} = 0,6$ грн; $c_{32} = 0,7$ грн; $c_{33} = 0,8$ грн.

Необходимо выбрать оптимальный вариант размещения кожевенного завода, позволяющий минимизировать затраты на производство хромовых кож и перевозку их к обувным фабрикам.

Развернутая матрица модели задачи размещения предприятия в формате оптимизационного пакета PLP-2000 представлена на рис. 9.1.

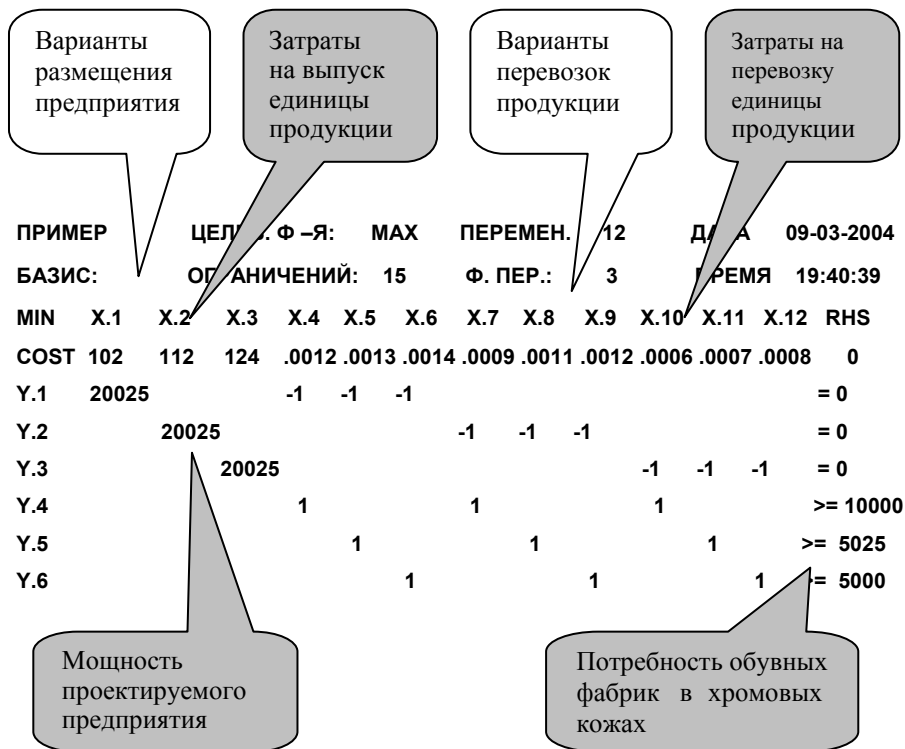


Рис. 9.1. Матрица модели размещения предприятия в формате пакета PLP-2000

Переменными матрицы модели являются интенсивность использования вариантов размещения предприятий (X.1 – X.3) и перевозок готовой

§ 9.1. Моделирование размещения предприятия

продукции ($x_4 - x_{12}$). Ограничения модели выступает потребность обувных фабрик в хромовых кожах для изготовления обуви. Количество потребляемого сырья и химических материалов здесь не ограничены. Объем выпуска продукции определяется мощностью проектируемого предприятия. При построении матрицы модели,

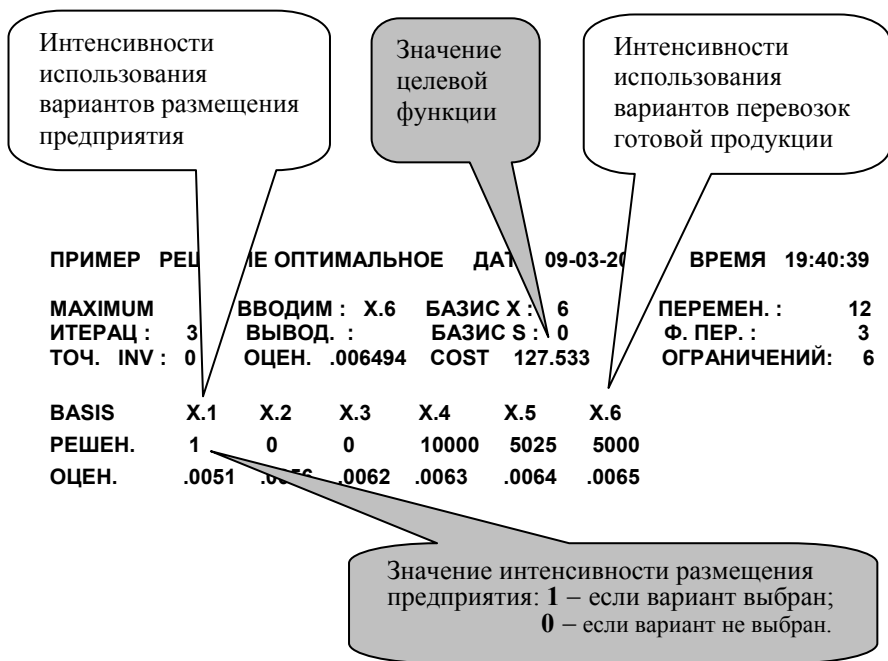


Рис. 9.2. Решение задачи размещения предприятия в формате пакета PLP-2000

пришлось прибегнуть к приему масштабирования числовых коэффициентов целевой функции, что дало возможность избежать ошибок, связанных с переполнением старших разрядов. Результаты решения задачи размещения предприятия представлены на рис. 9.2. Результаты

расчетов показывают, что несмотря на более высокую стоимость перевозок самым эффективным является первый вариант размещения кожевенного завода **X.1**, так как он наиболее экономичен (затраты на производство хромовых кож у него самые низкие). Потребности обувных фабрик в хромовых кожах будут целиком выполнены.

Краткое повторение

- ❑ **Размещение предприятия** – проблема, связанная со строительством, расширением производства, его свертыванием или ликвидацией.
- ❑ **Оптимальность варианта размещения** – один из эффективных вариантов размещения, позволяющий как можно более полно учесть влияние важнейших производственных факторов.
- ❑ **Производственные факторы** – природные и климатические условия, полезные ископаемые, лесные и водные ресурсы, рабочая сила, развитие техники и технологий, транспортные условия.

§ 9.2. Модель многоэтапного размещения производства

Формализация математической модели задачи

Производство продукции осуществляется в несколько этапов – заготовка сырья, его переработка в полуфабрикат, производство готовой продукции. Необходимо определить оптимальную мощность размещаемых предприятий с учетом дискретного изменения вариантов мощности на отдельных этапах процесса производства. Для математического описания модели задачи введем следующие

§ 9.2. Модель многоэтапного размещения производства

необходимые обозначения:

t – номер этапа;

T – число всех этапов;

n_t – количество предприятий на этапе t ;

j – номер потребителя;

u – номер предприятия промежуточного этапа, включая и начальный этап;

a_t^u – объем производства предприятия u на этапе t ;

A_j – объем потребления продукции на последнем этапе;

c_t^u – затраты на переработку единицы сырья на предприятия u на этапе t ;

c_t^{uk} – затраты на перевозку единицы продукции, от предприятия u , полученной на этапе t , к предприятию k на этапа $t+1$;

x_t^{uk} – объем перевозок продукции от предприятия u на этапе t , к предприятию k на этапе $t+1$.

Каждое предприятие k последующего этапа является потребителем сырья или полуфабриката, производимого на предприятиях на предыдущем этапе. В зависимости от этапа переработки предприятие может быть как потребитель или поставщик продукции. Числовые значения величин a_t^u , A_j , x_t^{uk} задаются в однородных единицах измерения путем пересчета в единый условный продукт.

Математическая модель состоит из целевой функции, которая отражает затраты на производство и перевозку продукции на всех этапах

$$\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{u=1}^{n_t} \sum_{k=1}^{n_{t+1}} c_t^u a_t^u x_t^{uk} + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{u=1}^{n_t} \sum_{k=1}^{n_{t+1}} c_t^{uk} a_t^u x_t^{uk} \rightarrow \min \quad (9.6)$$

при следующих условиях:

объем вывоза не должен превышать

установленного размера

$$\sum_{k=1}^{n_{t+1}} x_t^{uk} \leq a_t^u, \quad t = \overline{1, T}; \quad u = \overline{1, n_t}; \quad (9.7)$$

объем поставок не должен превышать возможностей по переработке

$$\sum_{u=1}^{n_t} x_t^{uk} \leq a_{t+1}^u, \quad t = \overline{1, T-1}; \quad k = \overline{1, n_{t+1}}; \quad (9.8)$$

на каждом предприятии ввоз должен быть равен вывозу

$$\sum_{u=1}^{n_t} x_t^{uk} = \sum_{u=1}^{n_{t+1}} x_{t+1}^{uk}, \quad t = \overline{1, T-1}; \quad k = \overline{1, n_{t+1}}; \quad (9.9)$$

объем потребляемого продукта на последующем этапе, должен удовлетворяться полностью

$$\sum_{u=1}^{n_{t-1}} x_{t-1}^{uk} = A_j, \quad j = \overline{1, n_t}; \quad (9.10)$$

поставки должны быть неотрицательными

$$x_t^{uk} \geq 0, \quad t = \overline{1, T}; \quad u = \overline{1, n_t}; \quad k = \overline{1, n_{t+1}}. \quad (9.11)$$

**Задача
многоэтапного
размещения
производства**

Увеличение объемов производства хромовых кож предполагает возможность выбора места строительства цеха первичной переработки кожевенного сырья мощностью 15000 м², в непосредственной близости одного из трех мясокомбинатов, а также, необходимость реконструкции одного из двух кожевенных заводов, увеличение их мощности до 15000 м² хромовых кож. Производство хромовых кож, осуществляется в два этапа: на первом цех первичной переработки кожевенного сырья производит дубленый полуфабрикат; на втором из дубленого полуфабриката на кожевенном заводе уже получают готовые хромовые кожи. Потребителями этой продукции являются две обувные фабрики, потребность которых составляет 8000 м² и 7000 м². Затраты на производство одного м² дубленого полуфабриката и его перевозку на кожевенный завод, а также получение готовой кожи и ее доставка на обувные фабрики, зависят от выбора места строительства цеха

§ 9.2. Модель многоэтапного размещения производства

первичной переработки и реконструируемого предприятия. На первом этапе, затраты на производство одного м² дубленого полуфабриката

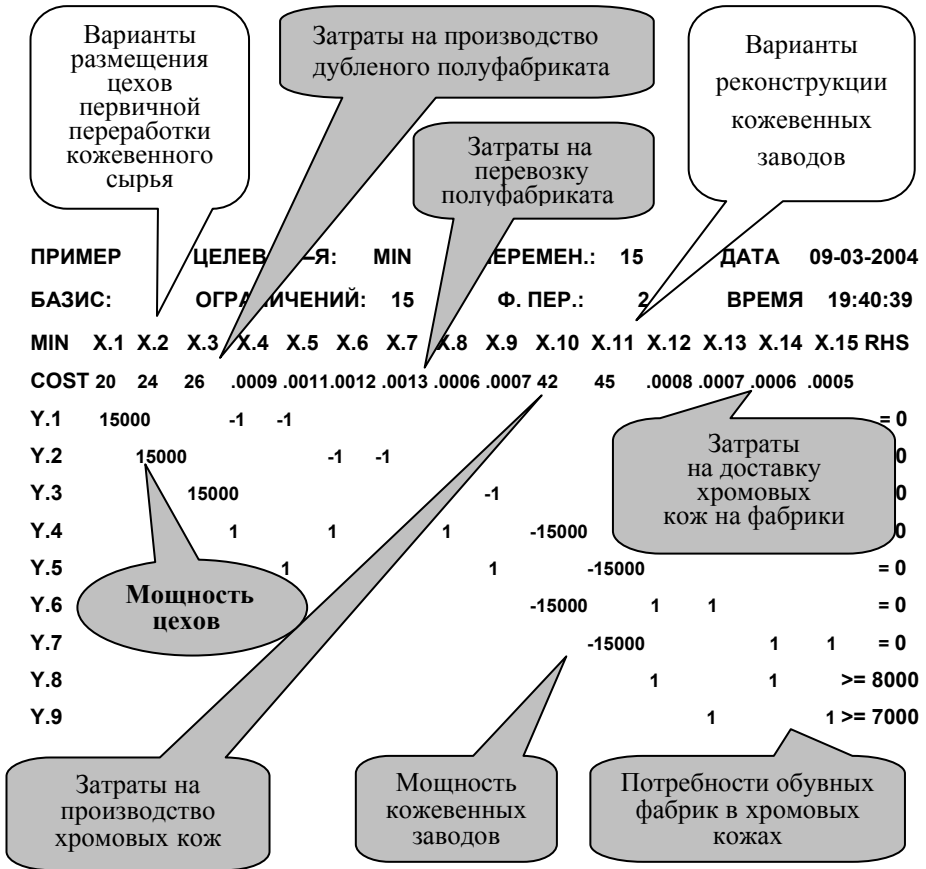


Рис. 9.3. Матрица модели многоэтапного размещения производства в формате пакета PLP-2000

в зависимости от места размещения цеха первичной переработки сырья составляют $c_1^1 - 1,3$ грн, $c_1^2 - 1,6$ грн, и $c_1^3 - 1,7$ грн.

Затраты на перевозку одного м² дубленого полуфабриката на кожевенные заводы соответственно равняются $c_1^{11} - 0,9$ грн, $c_1^{12} - 1,1$ грн, $c_1^{21} - 1,2$ грн, $c_1^{22} - 1,3$ грн, $c_1^{31} - 0,6$ грн и $c_1^{32} - 0,7$ грн. На втором



Рис. 9.4. Решение задачи многоэтапного размещения производства в формате пакета PLP-2000

этапе, затраты на получение одного м² хромовых кож из дубленого полуфабриката на кожевенных заводах составляют: $c_2^1 - 2,8$ грн и $c_2^2 - 3$ грн. Затраты на доставку хромовых кож на обувные фабрики

составляют: $c_2^{11} - 0,8$ грн, $c_2^{12} - 0,7$ грн, $c_2^{21} - 0,6$ грн и $c_2^{22} - 0,5$ грн. Целью решения задачи является минимизация суммарных затрат на производство и перевозку на всех стадиях процесса производства.

Развернутая матрица модели задачи многоэтапного размещения производства в формате пакета PLP-2000 представлена на рис.9.3. Переменными матрицы модели **Х.1 – Х.3** являются расчетные значения интенсивностей использования вариантов размещения цехов первичной переработки кожевенного сырья. Значение этих величин может быть следующим: **1**, если вариант выбран и **0**, если вариант не выбран. Переменные **Х.4 – Х.9** представляют собой расчетные значения интенсивностей перевозки дубленого полуфабриката от цехов первичной переработки к кожевенным заводам. Эти значения определяют наиболее рациональные варианты организации поставок. Значения переменных **Х.10 – Х.11** показывают интенсивность использования возможных вариантов реконструкции кожевенного завода на втором этапе. В том случае если вариант реконструкции принимается, то значение этой переменной равно **1**, если же вариант реконструкции не принимается, ее значение равно **0**. Переменные **Х.12 – Х.15** представляют собой интенсивности использования, того или иного, варианта организации поставок хромовых кож с кожевенных заводов на обувные фабрики. Интенсивность поставок определяется величиной суммарной потребности хромовых кож обувных фабрик.

Результаты расчетов представлены на рис. 9.4. Анализ результатов решения задачи многоэтапного размещения производства показывает, что наиболее оптимальным является первый вариант размещения цеха первичной переработки кожевенного сырья. Преимуществом этого варианта размещения, является как низкая стоимость производства дубленого полуфабриката, так и средняя стоимость затрат на его перевозку. Наиболее оптимальным вариантом реконструкции кожевенного завода на втором этапе производства из двух предполагаемых вариантов является первый. Достоинством этого варианта несмотря на несколько большие затраты на перевозку готовой продукции является его значительно большая экономичность производства хромовых кож, что делает его наиболее рациональным вариантом организации многоэтапного производства. Результаты расчетов показывают, что минимальная величина затрат при выборе оптимального варианта многоэтапное размещение кожевенного производства (рис. 9.4) будет составлять

86,8 млн грн. В качестве наилучшего варианта размещения цехов первичной переработки кожевенного сырья будет выбран технологический способ **Х.1**.

Краткое повторение

- ❑ **Многоэтапность производственного процесса** – последовательность этапов процесса производства начиная с этапа заготовки сырья, его переработки в полуфабрикат и получение готовой продукции.
- ❑ **Мощность многоэтапного размещаемого производства** – оптимальная величина вариантов дискретной мощности размещаемых предприятий на отдельных этапах процесса производства.

§ 9.3. Модель размещения многопрофильного производства

Постановка математической модели задачи

В задачах размещения многопрофильного производства, ориентированного на выпуск различных видов продукции рассматривается проблема оптимизации мощностей предприятий и транспортных потоков нескольких видов продуктов. На предприятии может производиться несколько различных видов продукции, и потребители могут получать несколько видов продукции. Модель задачи размещения многопрофильного производства является обобщением аналогичных моделей однопродуктовых задач размещения.

§ 9.3. Модель размещения многопрофильного производства

Для формализации экономико-математической модели задачи введем следующие обозначения:

i – номер предприятия;

m – число всех предприятий;

j – номер потребителя;

n – число всех потребителей;

k – номер вида продукции;

l – число всех видов продукции;

N_{ik} – максимально возможный объем производства продукции вида k на предприятии i ;

Q_{ik} – затраты на производство единицы продукции вида k на предприятии i в соответствии с вариантом q ;

A_{ik} – объем потребления продукции вида k потребителем i ;

C_{ijk} – стоимость перевозки единицы продукции вида k от предприятия i потребителю j ;

x_{ik} – объем производства продукции вида k на предприятии i ;

x_{ij} – объем перевозок продукции вида k от предприятия i к потребителю j .

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l Q_{ik} x_{ik} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l C_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \min \quad (9.12)$$

при ограничениях: на производство продукции

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^n x_{ijk} \leq N_{ik}, \quad j = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, l}; \quad (9.13)$$

на потребление продукции

$$x_{ik} \geq 0, \quad x_{ijk} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, l}. \quad (9.14)$$

**Задача
размещения
многопрофильного
производства**

Предприятие деревообработки мощностью 300 м^3 в смену, планируется разместить в близости одного из трех хозяйств, которые занимающихся заготовкой леса. Предприятие будет производить брус и обрезную доску. Для комплексной переработки древесины, на предприятии будет построен цех по выпуску древесно-стружечной плиты (ДСП) и древесноволокнистой плиты (ДВП) из древесных опилок. Кроме того, планируется строительство цеха по производству письменных столов и книжных полок из ДСП. В зависимости от выбора места размещения предприятия затраты на переработку одного м^3 древесины будут составлять: $Q_1 = 305,4$ грн, $Q_2 = 310,1$ грн и $Q_3 = 305,4$ грн. Из 300 м^3 перерабатываемого леса планируется получать 70 м^3 бруса и 140 м^3 обрезной доски, а также 200 м^2 ДСП и 600 м^2 ДВП. Весь производимый брус и обрезная доска будут поставляться трем заказчикам – строительным фирмам строящим дома. Объемы поставок бруса будут распределены следующим образом: $A_{11} = 40 \text{ м}^3$; $A_{12} = 70 \text{ м}^3$. Объемы поставок доски при этом, распределятся так: $A_{21} = 50 \text{ м}^3$; $A_{22} = 60 \text{ м}^3$; $A_{23} = 30 \text{ м}^3$. Из 200 м^2 производимой предприятием ДСП, 110 м^2 планируется использовать на внутренние потребности, для выпуска письменных столов и книжных полок, а 90 м^2 отправить мебельной фабрике. Причем на производство письменных столов будет направлено 70 м^2 ДСП, а на производство книжных полок 40 м^2 . Вся произведенная в объеме 600 м^2 ДВП будет направлена трем строительным фирмам: $A_{31} = 200 \text{ м}^2$; $A_{32} = 300 \text{ м}^2$; $A_{33} = 100 \text{ м}^2$.

Стоимость перевозки одного м^3 бруса постоянным заказчикам строительным фирмам составит: $C_{111} = 20,41$ грн; $C_{112} = 18,43$ грн; $C_{121} = 20,54$ грн; $C_{122} = 18,48$ грн; $C_{131} = 20,47$ грн; $C_{132} = 20,47$ грн. Стоимость перевозки обрезной доски ставит: $C_{211} = 20,41$ грн; $C_{212} = 18,43$ грн; $C_{213} = 16,71$ грн; $C_{221} = 20,54$ грн; $C_{222} = 18,48$ грн; $C_{223} = 17,33$ грн; $C_{231} = 20,47$ грн; $C_{232} = 18,46$ грн; $C_{233} = 17,12$ грн.

§ 9.3. Модель размещения многопрофильного производства

Стоимость перевозки одного м² ДСП на мебельную фабрику составит: $C_{311} = 0,51$ грн; $C_{312} = 0,53$ грн; $C_{313} = 0,52$ грн; перевозки ДВП строительным фирмам: $C_{411} = 0,11$ грн; $C_{412} = 0,12$ грн; $C_{413} = 0,11$ грн; $C_{421} = 0,17$ грн; $C_{422} = 0,17$ грн; $C_{423} = 0,14$ грн; $C_{431} = 0,14$ грн; $C_{432} = 0,13$ грн; $C_{433} = 0,12$ грн.

Производимые на предприятии письменные столы и книжные полки направляются на реализацию в мебельный магазин. Стоимость перевозки их составит: $C_{511} = 9,71$ грн; $C_{521} = 9,92$ грн; $C_{531} = 9,71$ грн; $C_{611} = 1,33$ грн; $C_{621} = 1,42$ грн; $C_{631} = 1,39$ грн.

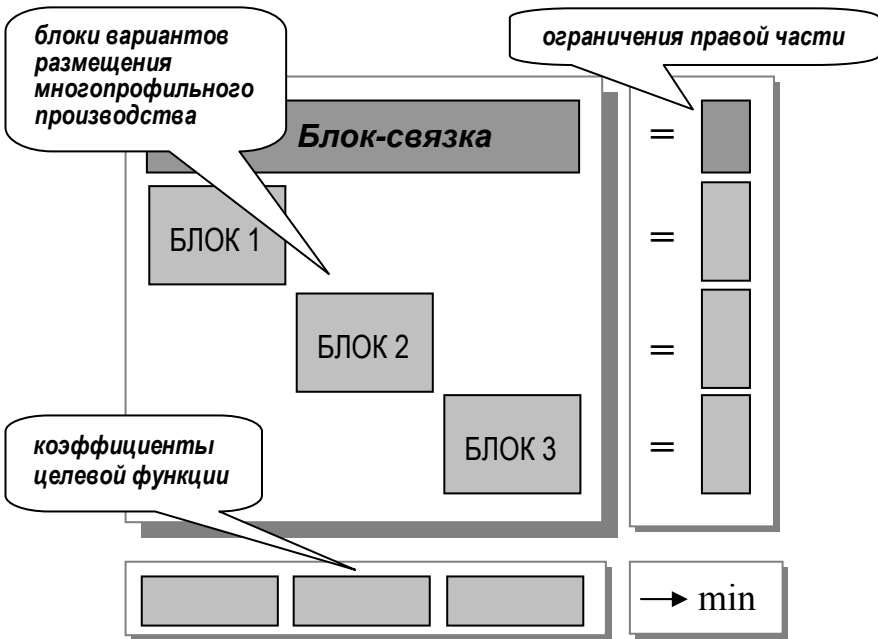


Рис. 9.5. Блочная схема матрицы модели размещения многопрофильного производства

Целью решения задачи является выбор наиболее эффективного варианта размещения многопрофильного производства позволяющего минимизировать суммарные затраты на получение готовой продукции и перевозки ее к потребителю. Матрица экономико-математической

модели задачи размещения многопрофильного производства представлена на рис. 9.5. Матрица модели состоит из трех блоков размещения, связующего блока, ограничений правой части и целевой функции. Фрагмент матрицы модели описывающий блок № 1 пред-

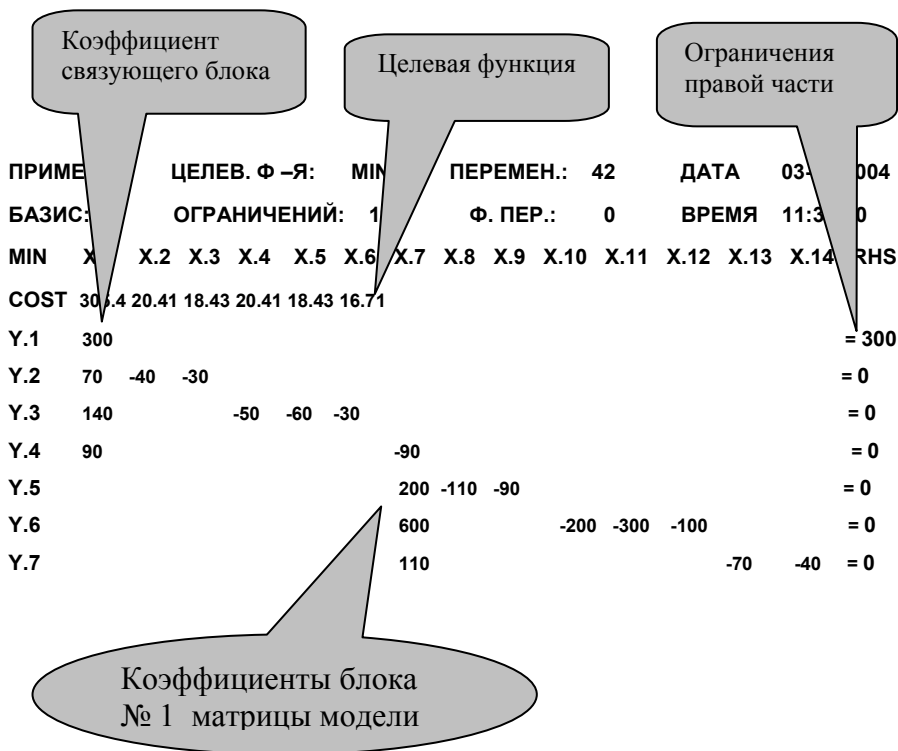


Рис. 9.6. Блок матрицы модели размещения многопрофильного производства в формате пакета PLP-2000

ставлен на рис 9.6. С помощью связующего блока, общей целевой функции и ограничений правых частей три блока матрицы модели объединяются в единую матрицу. Переменные модели X.1, X.15 и X.29 показывают интенсивность использования одного из возможных

§ 9.3. Модель размещения многопрофильного производства

вариантов размещения многопрофильного производства. Анализ результатов решения оптимизационной задачи размещения многопрофильного производства показывает, что наиболее эффективным

ПРИМЕР РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ		ДАТА 03-14-2004		ВРЕМЯ 11:31:40					
MINIMUM	ВВОДИМ :	БАЗИС X :	19	ПЕРЕМЕН. :	42				
ИТЕРАЦ : 13	ВЫВОД. :	БАЗИС S :	0	Ф. ПЕР. :	0				
ТОЧ. INV : 0	ОЦЕН. 0	COST	385.027	ОГРАНИЧЕНИЙ:	19				
BASIS	X.2	X.2	X.5	X.1	X.9	X.11	X.14	X.16	X.19
X.15	X.23	X.25	X.28	X.30	X.33	X.29	X.37	X.39	X.42
РЕШЕН.	1	1.75	2.333	1	2.222	2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ОЦЕН.	1.283	-5102	-3038	-0153	.0057	-0004	-0333	-5135	-3072
.0447	-0059	-0005	-0355	-5117	-3077	8.50000	-0058	-0004	-0347

Рис. 9.7. Решение задачи размещения многопрофильного производства в формате пакета PLP-2000

вариантом размещения (рис.9.7) является первый вариант. В отличие от двух других вариантов, он характеризуется наименьшей величиной удельных затрат на переработку одного м³ древесины и доставки готовой продукции к потребителю. Минимальная величина затрат, COST при этом составляет 385,027 грн.

Краткое повторение

- **Размещение многопрофильного производства** – задача размещения производства ориентированного на выпуск различных видов продукции. При решении задачи оптимизируются мощности предприятия и транспортные потоки нескольких видов продукции.
- **Эффективный вариант размещения** – вариант размещения многопрофильного производства, который позволяет минимизировать суммарные затраты.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

дискретная мощность предприятия
многоэтапность процесса производства
мощность многоэтапного размещения
производства
оптимальность варианта размещения

производственные факторы
размещение многопрофильного
производства
размещение предприятия
эффективность вариантов размещения

***Контрольные вопросы
и задания***



1. Оптимальность вариантов размещения предприятия.
2. Вариантная модель размещения предприятия.
3. Задача размещения предприятия.
4. Модель многоэтапного размещения производства.
5. Особенности постановки и решения задач многоэтапного размещения производства.
6. Модель размещения многопрофильного производства.
7. Решение задачи размещения многопрофильного производства.

В этой главе рассмотрен целый ряд вопросов экономико-математического моделирования связанных с развитием промышленного производства. Основное внимание в ней уделено выбору альтернативных вариантов развития предприятий, моделирования инвестирования в развитие производства.

§ 10.1. Моделирование альтернатив развития

Альтернативность вариантов развития предприятия

Увеличение выпуска, расширение ассортимента и улучшение качества продукции в промышленном производстве предполагает два возможных варианта решения этой задачи: модернизацию действующих предприятий и строительство новых.

Модернизация предприятия – замена физически изношенных и устаревших станков и технологического оборудования – может быть частичной и полной. При частичной модернизации может заменяться как какой-либо один станок, так и группа станков или технологического оборудования. При полной модернизации заменяются все станки и все технологическое оборудование. Увеличение производственной мощности предприятий, при этом достигается за счет замены менее мощного оборудования на более мощное. *Строительство новых предприятий* означает не только введение в строй новых производственных мощностей созданных на основе прежних, применяемых ранее технологий, но и использование последних достижений научно-технического прогресса. Это открывает широкие возможности для внедрения техники последних поколений, новейших прогрессивных технологий, создания предприятий с современной организацией и управлением производством. Модернизация предприятия дает

не только увеличение выпуск продукции, но также экономию средств за счет размещения станков и технологического оборудования в реконструированных цехах предприятия. В этой связи строительство новых предприятий наиболее целесообразно тогда, когда прирост выпуска продукции позволяет в наиболее короткие сроки окупить затраты на введение в строй новых мощностей.

Модель выбора оптимальных вариантов развития предприятия

Имеется ряд альтернативных вариантов развития предприятия, которые в свою очередь предполагают, как возможность модернизации производства, так и строительство нового предприятия. Эти варианты отличаются друг от друга количеством выпускаемой предприятием продукции и различным сроком окупаемости затрат на обновление производства. Необходимо определить оптимальный вариант развития предприятия, позволяющий удовлетворить спрос на выпускаемую продукцию, сведя потери от простоя оборудования к минимуму.

Для построения экономико-математической модели задачи введем следующие обозначения:

i – вид выпускаемой продукции;

q – количество видов выпускаемой продукции;

j – альтернативный вариант развития предприятия;

n – количество вариантов развития предприятия;

a_{ij} – нормативный коэффициент выпуска продукции вида i при выборе варианта развития j ;

W_i – минимальный объем выпуска продукции вида i ;

P_i – потребность в выпускаемой продукции вида i ;

c_j – прибыль от выпуска продукции вида i при выборе варианта развития j ;

x_j – количество дней работы оборудования занятого выпуском

§ 10.1. Моделирование альтернатив развития

продукции вида i , при выборе варианта развития j ;

z_{ij} – количество дней простоя оборудования занятого выпуском продукции вида i , при выборе варианта развития j .

Математическая модель. Исходя из возможных перспектив развития предприятия найти наиболее эффективный вариант производства продукции, покрывающий затраты на расширение выпуска

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = W_i, \quad (10.1)$$

который целиком обеспечивает ее потребность

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq P_i, \quad i = \overline{1, q}, \quad (10.2)$$

позволяет максимизировать величину получаемой прибыли

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n c_j x_j - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n c_{ij} z_j \rightarrow \max, \quad (10.3)$$

при условии неотрицательности переменных

$$x_j \geq 0, \quad z_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10.4)$$

Постановка и решение задачи выбора вариантов развития

Мощность цеха по выпуску спортивной обуви составляет 500 пар кроссовок за смену. Изучение спроса на рынке продукции, показало возможность увеличения ее выпуска до 300 тыс. пар в год. Увеличение выпуска продукции предполагает как возможность реконструкции цеха, модернизации его оборудования, так и строительство нового цеха. В этой связи

рассматривается вариант строительства нового цеха мощностью 1200 пар в смену и три возможных варианта модернизации цеха с объемом выпуском 800, 720 и 600 пар спортивной обуви. Производство одной пары кроссовок приносит предприятию прибыль в размере 20 грн. Экономические расчеты показали, что строительство нового цеха должно окупиться за три года. Срок окупаемости каждого из трех предложенных вариантов реконструкции цеха соответственно 2, 1,5 и 1,2 года. Необходимо выбрать наиболее эффективный вариант развития цеха, обеспечивающий наибольший объем выпуск спортивной обуви с учетом ее спроса, позволяющий сократить к минимуму возможные убытки от простоя оборудования.

Для построения матрицы экономико-математической модели выполним ряд предварительных вычислений. Вначале определим необходимый объем выпуска продукции, который позволяет окупить строительство нового цеха. Этот объем будет наибольшим и составит 914,4 тыс. пар кроссовок ($1200 \cdot 254 \cdot 3 = 914400$). Для различных вариантов реконструкции цеха этот показатель соответственно составит: 406,4 тыс. пар ($800 \cdot 254 \cdot 2 = 406400$), 274,32 тыс. пар ($720 \cdot 254 \cdot 1,5 = 274320$) и 182,88 тыс. пар ($600 \cdot 254 \cdot 1,2 = 182880$). Учитывая ежегодную потребность в кроссовках и срок окупаемости каждого из вариантов, определим один из наиболее перспективных вариантов развития цеха. Производство спортивной обуви при этом, не должно соответственно превышать: 900 тыс. пар ($300000 \cdot 3 = 900000$) для варианта строительства нового цеха, а также 600 тыс. пар ($300000 \cdot 2 = 600000$), 450 тыс. пар ($300000 \cdot 1,5 = 450000$) и 360 тыс. пар ($300000 \cdot 1,2 = 360000$) для вариантов реконструкции старого цеха. Убыток от простоя оборудования, при выборе того или иного варианта, рассчитывался как возможная величина не полученной прибыли вследствие одного дня простоя цеха, из-за отсутствия спроса, что составило соответственно: 24, 16, 14,4 тыс. грн. и 12 тыс. грн. Для наглядности и простоты задания в матрице модели нормативных коэффициентов отдельных технологических зависимостей выпуска продукции, показатель мощности цеха по производству спортивной обуви был взят в тыс. пар. При построении матрицы модели использовался прием введения дополнительных переменных. Введение дополнительных переменных, дало возможность отдельно выделить простой технологического оборудования. Матрица модели выбора альтернативных вариантов развития пред-

§ 10.1. Моделирование альтернатив развития

приятия в наиболее общем виде, представлена на рис. 10.1. Вектор-столбцами матрицы модели служат варианты развития предприятия, дополненные переменными простоя оборудования. Коэффициентами матрицы являются нормативные показатели выпуска спортивной

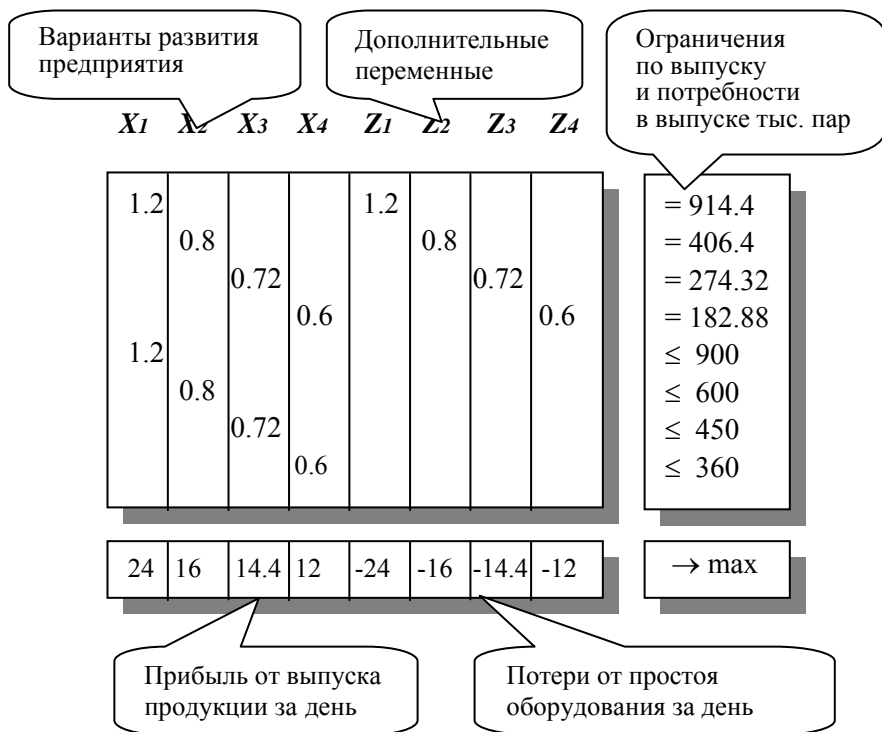


Рис. 10.1. Матрица модели выбора альтернативных вариантов развития предприятия

обуви. Ограничениями модели выступают расчетные значения объемов выпуска продукции, которые дают возможность окупить затраты на расширение производства, а также спрос на продукцию. Коэффициентами целевой функции модели являются прибыль полу-

чаемая от выпуска спортивной обуви за вычетом потерь от простоя оборудования за день. Целью решения задачи является получение максимальной прибыли от расширения производства за вычетом потерь связанных с простоем оборудования вследствие отсутствия

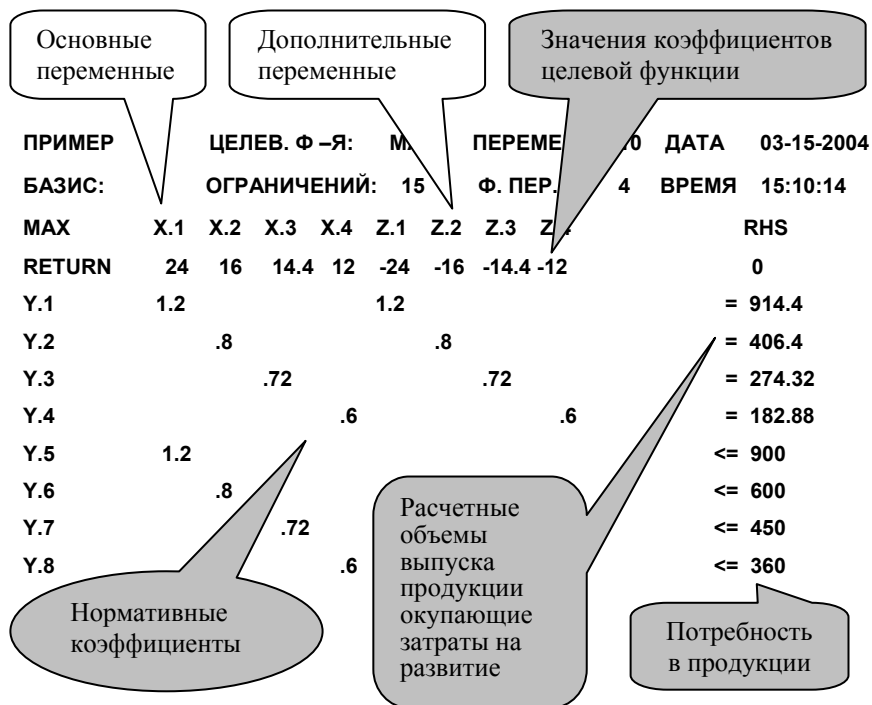


Рис. 10.2. Матрица модели выбора вариантов развития предприятия в формате пакета PLP-2000

спроса на продукцию. В наиболее общем виде с необходимыми комментариями матрица модели выбора вариантов развития предприятия в формате пакета PLP-2000 представлена на рис. 10.2.

Результаты расчетов показали, что наиболее перспективным вариантом развития предприятия является строительство нового цеха

§ 10.1. Моделирование альтернатив развития

по выпуску кроссовок мощностью 1200 пар в смену. Ни один из предлагаемых вариантов модернизации цеха не в состоянии полностью обеспечить спрос. Так, в случае модернизации, цеха предполагающего выпуск 800 пар кроссовок в смену, на протяжении двух лет будет произведено 406,4 тыс. пар. Из полученных результатов расчетов



Рис. 10.3. Решение задачи выбора вариантов развития предприятия в формате пакета PLP-2000

(рис. 10.3) следует, что при ежегодной потребности 300 тыс. пар спрос на кроссовки целиком удовлетворен не будет. Дефицит составит 193,6 тыс. пар. (переменная S.6). Это также относится и к другим предлагаемым вариантам выпуска спортивной обуви -720 и 600 пар в смену, для которых дефицит составит соответственно 175,7 тыс. пар (переменная S.7) и 117,1 тыс. пар (переменная S.8).

Краткое повторение

- **Модернизация предприятия** – замена физически изношенных, устаревших станков и технологического оборудования новым.

- **Строительство новых предприятий** – введение новых производственных мощностей созданных на основе последних достижений научно-технического прогресса.
- **Альтернативность вариантов развития** – выбор на множестве вариантов одного из планов модернизации старого предприятия, или строительства нового.

§ 10.2. Модель инвестирования в развитие производства

Моделирование инвестирования в развитие производства

Повышения эффективности инвестирования в развитие производства в условиях ограниченности денежных ресурсов важнейшее значение приобретает очередность введения в строй производственных мощностей, т. е. оптимальное распределение лимитированных средств по годам. В планировании развития производства необходимо рассматривать различные варианты инвестирования и выбрать из них оптимальный. Целью решения задачи повышения эффективности инвестирования в производство является оптимизация распределения инвестируемых средств, ускорение ввода в действие производственных мощностей, сокращение сроков проектирования и строительства предприятий, повышение рентабельности производства, рост величины получаемой прибыли.

Моделирование инвестирования в развитие производство дает возможность выбора объекта строительства и реконструкции, последовательности ввода их в строй, модернизации. Основными ограничениями решения задачи при этом являются: лимиты инвестируемых средств, объемы строительно-монтажных и ремонтных работ, ввод мощностей, наличие проектно-сметной документации и заделов. Чтобы правильно регулировать объемы инвестируемых средств на

§ 10.2. Модель инвестирования в развитие производства

переходящий объекты и новостройки при промышленном строительстве необходимо обеспечить определенные заделы. Этого можно достигнуть в результате концентрации финансовых средств на вводимых промышленных объектах, уменьшения количества начатых объектов, оптимизации распределения инвестируемых средств.

Модель инвестирования в развитие производства

Для сокращения распыления инвестируемых средств и ускорения ввода основных фондов при условиях ввода мощностей пропорционально инвестициям используют критерий максимизации – ввод основных фондов. При максимизации значения целевой функции будет отдаваться предпочтение тем стройкам, приоритет которых больше и у которых больше остаток основных фондов, но меньше остаток сметной стоимости.

t – год планового периода;

T – число лет планового периода;

K_t – лимит инвестируемых средств в году t ;

r – вид мощности;

i – номер стройки;

n – число строек;

R_i – инвестиции на постройку предприятия i ;

f_i – остаток инвестируемых средств на стройке i ;

P_i – приоритет стройки i ;

M_{ir} – план по вводу мощностей вида r в году t ;

m_{ir} – ввод мощностей вида r на единицу инвестируемых средств в строительство предприятия i ;

T_i – продолжительность строительства предприятия i ;

x_{it} – искомый объем инвестируемых средств на строительство предприятия i в году t ;

Математическая модель состоит в определении таких значений x_{it} , при которых достигается максимум ввода в строй предприятий

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{T_i} \frac{f_i P_i x_{it}}{R_i} \rightarrow \max \quad (10.5)$$

при ограничениях: на лимит инвестируемых средств

$$\sum_{i=1}^n x_{it} = K_t, \quad t = \overline{1, T}; \quad (10.6)$$

на сметную стоимость строящегося предприятия

$$\sum_{i=1}^{T_i} x_{it} \leq R_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (10.7)$$

на ввод мощностей

$$\sum_{i=1}^n m_{it} x_{it} \geq M_{rt}, \quad t = \overline{1, T}; \quad (10.8)$$

на реальные возможности

$$x_{it} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad t = \overline{1, T}. \quad (10.9)$$

В приведенной модели величины R_i и f_i выражают для строящихся новых предприятий объем инвестируемых средств, а для переходящих строек – остаток инвестируемых средств, которые предстоит освоить и ввести в строй в плановом периоде. Величина P_i обозначает приоритет, который задается либо рассчитывается. Рассмотренная модель может быть изменена или дополнена в зависимости от требований.

**Задача
инвестирования
в развитие
производства**

Для инвестирования в развитие производства бытовых кондиционеров будет направлено 300 млн грн. Для налаживания массового выпуска бытовых кондиционеров в течение трех лет планируется построить четыре предприятия по их производству. При этом в первый год на строительство предприятий будет инвестировано 120 млн., во второй год будет направлено 100 грн. и в третий год будет направлено 80 млн грн. Стоимость строительства первого завода обойдется в 78 млн грн., второго завода в 76 млн грн., третьего

§ 10.2. Модель инвестирования в развитие производства

завода в 74 млн грн. и четвертого завода в 72 млн грн. Поэтапный ввод производственных мощностей дает прирост выпуска продукции в объеме 2000 бытовых кондиционеров на 1 млн инвестируемых средств. Выпуск кондиционеров в первый год должен увеличиться на 240 тыс. шт., во второй на 200 тыс. шт., и в третий на 160 тыс. шт. Объем инвестируемых средств на строительство первого завода в первый год должен составить 30 млн грн., во второй год 28 млн грн., в третий год – 20 млн грн. Инвестируемые средства во второй завод

Таблица 10.1

Расчетные значения коэффициентов целевой функции

Вариант инвестирования	Предприятие	f_i	P_i	R_i	$f_i P_i / R_i$
1.	1	78	4	78	4
2.		48	4	78	2,46
3.		20	4	78	1,03
4.	2	76	3	76	3
5.		48	3	76	1,89
6.		22	3	76	0,86
7.	3	74	2	74	2
8.		52	2	74	1,4
9.		22	2	74	0,59
10.	4	72	1	72	1
11.		50	1	72	0,69
12.		26	1	72	0,36

в первый год составят 28 млн грн., во второй год – 26 млн грн., в третий год – 22 млн грн. Средства инвестируемые в третий завод в первый год составят 22 млн грн., во второй год – 24 млн грн., в третий год – 28 млн грн. Инвестируемые средства в строительство четвертого завода в первом году составят 22 млн грн., во втором году – 24 млн грн., в третий год – 26 млн грн. Числовые значения

коэффициентов задаваемых приоритетов инвестирования в строительство предприятий установлены таким образом: первый завод – 4; второй завод – 3; третий завод – 2; четвертый завод – 1.

Матрица модели инвестирования в развитие производства в формате пакета PLP-2000 представлена на рис. 10.4.

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-Я: MAX						ПЕРЕМЕНН.: 12				ДАТА	04-21-2004	
БАЗИС: NONE	ОГРАНИЧЕНИЙ: 15						Ф. ПЕР.: 7				ВРЕМЯ	19:56:45	
MAX	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	X.9	X.10	X.11	X.12	RHS
RETURN	4	2.46	1.03	3	1.89	0.86	2	1.4	0.59	1	0.69	0.39	0
Y.1	1			1			1			1			= 120
Y.2		1			1			1			1		= 100
Y.3			1			1			1			1	= 80
Y.4	1	1	1										= 78
Y.5				1	1	1							= 76
Y.6							1	1	1				= 74
Y.7										1	1	1	= 72
Y.8	2000			2000			2000			2000			= 240000
Y.9		2000			2000			2000			2000		= 200000
Y.10			2000			2000			2000			2000	= 160000

Рис. 10.4. Матрица модели инвестирования в развитие производства в формате пакета PLP-2000

Переменными матрицы модели X.1 – X.12 выступают расчетные значения, объемов инвестирования в строительство предприятий по отдельным годам планируемого периода. Ограничениями модели являются: лимиты инвестируемых в отдельные годы средств Y.1 – Y.3, объемов инвестируемых средств в строительство предприятий Y.4 – Y.7 и ввода мощностей по выпуску продукции Y.8 – Y.10. Расчетные значения коэффициентов целевой функции матрицы модели инвестирования в развитие производства приведены в табл. 10.1. При расчете коэффициентов целевой функции учитывались такие величины как

§ 10.2. Модель инвестирования в развитие производства

остаток инвестируемых средств в строительство предприятия, устанавливаемая величина приоритета, объем инвестируемых в строительство средств.

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ					ДАТА 04-21-2004	ВРЕМЯ 19:56:45		
MAXIMUM	ВВОДИМ : S.10					БАЗИС X : 6	ПЕРЕМЕН. : 12		
ТОЧЕК : 16	ВЫВОД. :					БАЗИС S : 4	Ф. ПЕР. : 7		
ТОЧ. INV : 0	ОЦЕН. .00018					RETURN 625.3	ОГРАНИЧЕНИЙ: 10		
BASIS	S.8	S.9	S.10	X.1	X.8	X.12	S.7	X.4	X.5
X.9									
РЕШЕН.	0	0	0	78	66	72	0	42	34
8									
ОЦЕН.	2.28	1.17	.36	1.72	.72	.23	0	0	0
0									

Рис. 10.5. Решение задачи инвестирования в развитие производства в формате пакета PLP-2000

Анализ результатов решения задачи инвестирования в развитие производства показывает (рис. 10.5), что для наиболее эффективного использования инвестируемых средств, следует в первый год направить все необходимые средства 78 млн грн на постройку первого завода по выпуску бытовых кондиционеров (X.1) и 42 млн грн – на строительство второго завода (X.4). Во второй год необходимо направить 34 млн грн на достройку второго завода (X.5) и 66 млн. грн на строительство третьего завода (X.8). В третий год необходимо направить 8 млн грн на достройку третьего завода (X.8) и 72 млн грн на строительство четвертого завода (X.12).

Краткое повторение

- **Инвестирование в производство** – долгосрочное вложение финансовых средств в развитие предприятий.

- **Приоритет инвестирования** – выбор приоритета инвестирования финансовых средств в производство с целью повышения эффективности их использования.

§ 10.3. Модель инвестирования в развитие отрасли

Моделирование инвестирования в развитие отрасли

Необходимо достичь требуемых темпов развития предприятий отрасли, призванных обеспечить введения в строй планируемых производственных мощностей при ограничениях лимитов инвестируемых средств. Для построения экономико-математической модели задачи инвестирования в развития отрасли введем следующие обозначения:

- i – номер предприятия;
- m – число всех предприятий;
- j – номер вида продукции;
- l – число всех видов продукции;
- r – номер потребителей;
- n – число всех потребителей;
- q – номер варианта развития предприятия;
- Q – число всех вариантов развития предприятия;
- t – номер года планового периода;
- T – число лет планового периода;
- A_{jrt} – потребность потребителя r в продукции j в году t ;
- N_{ijqt} – мощность предприятия i по выпуску продукции j в году t согласно варианту развития q ;

§ 10.3. Модель инвестирования в развитие отрасли

- K_t – лимит инвестиций по отрасли в году t ;
 P_{it} – инвестиции в предприятие i в году t ;
 W_{ijqt} – производственные затраты на единицу продукции j на предприятии i в году t согласно варианту развития q ;
 C_{ijrt} – затраты на перевозку единицы продукции j от предприятия i к потребителю r в году t ;
 x_{iqt} – величина инвестируемых в развитие предприятия i средств в период t , когда принимается вариант развития q ;
 x_{jirt} – искомый объем перевозок продукции j в году t от предприятия i к потребителю r .

Математическая модель. Найти минимум общих затрат на развитие предприятий отрасли

$$\sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^l \sum_{t=1}^T N_{ijqt} W_{ijqt} + \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^l \sum_{t=1}^T C_{ijrt} x_{jirt} \rightarrow \min \quad (10.10)$$

при ограничениях: на инвестируемые в развитие отрасли средства

$$\sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^Q \sum_{t=1}^T x_{iqt} \leq K_t; \quad (10.11)$$

на инвестиции в развитие предприятия

$$\sum_{q=1}^Q x_{iqt} \leq P_{it}, \quad i = \overline{1, m}; \quad t = \overline{1, T}; \quad (10.12)$$

по мощности предприятий

$$\sum_{r=1}^n x_{jirt} = \sum_{q=1}^Q N_{ijqt}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, l}; \quad t = \overline{1, T}; \quad (10.13)$$

на потребность в продукции

$$\sum_{i=1}^m x_{jirt} = A_{jrt}, \quad j = \overline{1, l}; \quad r = \overline{1, n}; \quad t = \overline{1, T}; \quad (10.14)$$

на неотрицательность переменных

$$x_{iqt} \geq 0; x_{jirt} \geq 0; i = \overline{1, m}; q = \overline{1, Q}; j = \overline{1, L}; r = \overline{1, n}; t = \overline{1, T}. \quad (10.15)$$

**Задача
инвестирования
в развитие
отрасли**

Для реализации современных достижений науки и техники в сфере энерго- и тепло-сбережения планируется строительство предприятий по выпуску теплоизоляционных материалов для утепления теплотрасс и стен жилых домов. Программой инвестирования в развитие предприятий отрасли, планируется за два года построить четыре завода по выпуску теплоизоляционных материалов, общей мощностью 4 млн м³. Для этих целей в развитие предприятий отрасли в первый год будет инвестировано 110 млн грн, а во второй

Таблица 10.2

Инвестирование в развитие предприятий отрасли

Вариант инвестирования	Предприятие	P_{ij} , млн. грн.	N_{ijqt} , тыс. м ³	$P_{ij} / \sum N_{ijqt}$, грн.
1	1	55	500	55
2			500	55
3	2	53	500	53
4			500	53
5	3	52	500	52
6			500	52
7	4	50	500	50
8			500	50

год будет инвестировано 100 млн грн. Инвестируемые средства в развитие отдельных предприятий составят: первое предприятие – 55 млн грн; второе предприятие – 53 млн грн; третье предприятие – 52 млн

§ 10.3. Модель инвестирования в развитие отрасли

грн; четвертое предприятие – 50 млн. грн. Инвестируемые средства в создание производственных мощностей предназначенных для выпуска одного м³ теплоизоляционных материалов для каждого из предприятий (табл.10.2) составят: первое предприятие – 55 грн; второе предприятие – 53 грн; третье предприятие – 52 грн; четвертое предприятие – 50 грн. Основными потребителями теплоизоляционных

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-Я: MIN								ПЕРЕМЕНН.: 16				ДАТА 05-02-2004				
БАЗИС: NONE	ОГРАНИЧЕНИЙ: 15								Ф. ПЕР.: 8				ВРЕМЯ 13:58:41				
MIN	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	X.9	X.10	X.11	X.12	X.13	X.14	X.15	X.16	RHS
COST	55	55	53	53	52	52	50	50	.01	.02	.04	.05	.08	.09	.11	.12	
Y.1	1		1		1		1										<= 110
Y.2		1		1		1		1									<= 100
Y.3	1	1															>= 55
Y.4			1	1													>= 53
Y.5					1	1											>= 52
Y.6							1	1									>= 50
Y.7	.5		.5		.5		.5										>= 55
Y.8		.5		.5		.5		.5									>= 50
Y.9	.5	.5							-1	-1							= 0
Y.10			.5	.5							-1	-1					= 0
Y.11					.5	.5							-1	-1			= 0
Y.12							.5	.5							-1	-1	= 0
Y.13									1		1		1		1		<= 55
Y.14										1		1		1		1	<= 50

Рис. 10.6. Матрица модели инвестирования в развитие отрасли в формате пакета PLP-2000

материалов являются два строительных предприятия. Затраты на перевозку продукции от предприятий производителей теплоизоляционных материалов, к предприятиям потребителям составляют: $C_{11} = 10$ грн, $C_{12} = 20$ грн, $C_{21} = 40$ грн, $C_{22} = 50$ грн, $C_{31} = 80$ грн, $C_{32} = 90$ грн, $C_{41} = 110$ грн, $C_{42} = 120$ грн.

Матрица модели задачи в формате пакета PLP-2000 представлена на рис. 10.6. Она включает двенадцать переменных и четырнадцать ограничений. Переменными модели $X.1 - X.8$ являются расчетные значения величины инвестируемых в строительство предприятий средств в планируемом периоде. Ограничениями модели служат: лимитируемые значения инвестируемых в развитие отрасли средств

У.1 – У.2; инвестиций в развитие предприятий У.3 – У.6; мощности вводимых предприятий У.7 – У.8; потребности в продукции У.13 – У.14. Коэффициентами целевой функции – минимизируются затраты на создание производственных мощностей и перевозку готовой продукции к потребителям.

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ					ДАТА 05-02-2004	ВРЕМЯ 13:58:41			
MINIMUM	ВВОДИМ : S.1					БАЗИС X : 10	ПЕРЕМЕН. : 16			
ТОЧЕК : 13	ВЫВОД. :					БАЗИС S : 4	Ф. ПЕР. : 10			
ТОЧ. INV : 0	ОЦЕН. – 52.04					COST 11044.4	ОГРАНИЧЕНИЙ: 14			
BASIS	S.7	S.2	X.2	X.11	S.1	X.10	X.13	X.12	X.1	
X.3	X.5	X.8	X.15	S.14						
РЕШЕН.	0	0	50	4	0	27.5	26	22.5	5	
53	52	50	26	0						
ОЦЕН.	0	0	55.01	53.03	52.04	50.06	0	0	-.02	
-.05	-.09	-.12	-.01	0						

Рис. 10.7. Решение задачи инвестирования в развитие отрасли в формате пакета PLP-2000

Анализ результатов расчетов (рис. 10.7) показывает, что для оптимизации объемов инвестирования в развитие предприятий отрасли следует в первый год выделить необходимые инвестиции на строительство второго предприятия X.3 и третьего предприятия X.5. На строительство первого предприятия (X.1) необходимо выделить 5 млн грн. Во второй год на постройку первого предприятия (X.2) следует выделить 50 млн грн, и 50 млн грн на строительство четвертого предприятия.

Краткое повторение

- **Инвестирование в развитие отрасли** – инвестирование финансовых средств в реконструкцию и развитие предприятий отрасли.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

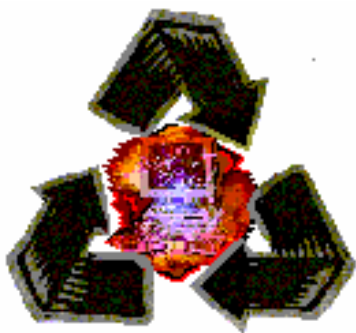
альтернативность вариантов развития
инвестирование в производство
инвестирование в развитие отрасли

модернизация предприятия
приоритет инвестирования
строительство новых предприятий

***Контрольные вопросы
и задания***



1. Альтернативность вариантов развития предприятия.
2. Модель выбора оптимальных вариантов развития предприятия.
3. Постановка и решение задачи выбора вариантов развития.
4. Моделирование инвестирования в развитие производства.
5. Модель инвестирования в развитие производства.
6. Задача инвестирования в развитие производства.
7. Моделирование инвестирования в развитие отрасли.
8. Задача инвестирования в развитие отрасли.
9. Решите рассмотренные задачи на компьютере.



Раздел VI

Оптимизация ассортимента продукции промышленного производства

✓ Глава 11 *Оптимизация ассортимента продукции*

- § 11.1. Моделирование специализации предприятия
- § 11.2. Оптимизация ассортимента продукции
- § 11.3. Моделирование диверсификации производства

✓ Глава 12 *Многокритериальные модели*

- § 12.1. Многокритериальность моделей
- § 12.2. Многокритериальность выбора
- § 12.3. Решение многокритериальной задачи

В этой главе показаны возможности выбора оптимального варианта специализации предприятия. Значительное внимание при этом уделено оптимизации ассортимента выпуска продукции в промышленном производстве. Рассмотрены также возможности моделирования диверсификации производства продукции.

§ 11.1. Моделирование специализации предприятия

Особенности специализации предприятия

Специализация предприятия представляет собой, такую организацию процесса производства, которая направлена на получение однородной, ограниченной номенклатуры продукции, узкого назначения. Это дает возможность для более эффективного использования современных высокопроизводительных станков и специализированного технологического оборудования. Специализация производства ведет к повышению технологической однородности производства, сокращению номенклатуры выпускаемой продукции.

Следует иметь в виду, что в промышленности количество наименований выпускаемой продукции значительно больше, чем число имеющихся предприятий, а номенклатура выпускаемой продукции растет неизмеримо быстрее количества вводимых в строй предприятий. Номенклатура выпускаемой предприятиями продукции постоянно обновляется и расширяется, что значительно усложняет возможности их специализации. В этой связи значительно возрастает роль экономико-математического моделирования в выборе оптимального варианта специализации предприятий с учетом их технических и технологических возможностей.

Модель выбора оптимального варианта специализации

Необходимо выбрать наиболее эффективный вариант специализации цехов предприятия, позволяющий обеспечить требуемый уровень выпуска определенного вида продукции с наименьшими затратами на производство. Специализация должна учитывать технические и технологические возможности производства связанные с обновлением номенклатуры выпускаемой продукции. Для математического описания условий задачи введем следующие условные обозначения:

- i – номер цеха предприятия;
- n – число цехов;
- k – вид выпускаемой продукции;
- l – число всех видов продукции;
- a_k – суммарная потребность в продукции вида k ;
- s – вид ресурса;
- m – число всех видов ресурсов;
- b_s – количество имеющегося ресурса s ;
- q_i – номер варианта специализации цеха i ;
- Q_i – число всех вариантов специализации цехов i ;
- a_{ikq_i} – объем производства продукции k на предприятии i при варианте специализации цеха q_i ;
- C_{iq_i} – суммарные затраты на производство продукции на предприятии i при варианте специализации цеха q_i ;
- x_{iq_i} – интенсивность использования варианта специализации q_i на предприятии i .

Математическая модель задачи будет иметь следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{q_i=1}^{Q_i} C_{iq_i} x_{iq_i} \rightarrow \min, \quad (11.1)$$

§ 11.1. Моделирование специализации предприятия

при ограничениях на лимиты потребляемых ресурсов

$$\sum_{i=1}^n \sum_{q_i=1}^{Q_i} a_{isq_i} x_{iq_i} \leq b_s, \quad s = \overline{1, m}; \quad (11.2)$$

количества выпускаемой продукции

$$\sum_{i=1}^n \sum_{q_i=1}^{Q_i} a_{ikq_i} x_{iq_i} \geq a_k, \quad k = \overline{1, l}; \quad (11.3)$$

использования варианта специализации

$$\sum_{q_i=1}^{Q_i} x_{iq_i} \leq 1, \quad i = \overline{1, n}; \quad (11.4)$$

$$x_{iq_i} = \begin{cases} 1, & \text{если принят вариант } q_i, \\ 0, & \text{если не принят вариант } q_i. \end{cases} \quad (11.5)$$

Задача выбора варианта специализации предприятия

Фабрика производит мужскую и женскую обувь. Мужская обувь выпускается тремя цехами. Планом производства обуви предусмотрено получение 1150 пар туфель, 900 пар полуботинок и 850 пар ботинок за смену. Мужскую обувь выпускают три цеха, в каждом из которых производится весь этот ассортимент продукции. Процесс производства обуви связан с расходом таких материалов как: кожа для верха обуви, кожа для подкладки, клея и ниток. Данные о расходе материалов и затратах на производство мужской обуви приведены в таблице 11.1. Выпускаемая обувь пользуется неизменным спросом. В связи с этим, предусматривается увеличить выпуск мужской обуви. Предполагается выпускать не менее 1200 пар туфель, 1000 пар полуботинок и 900 пар ботинок. Увеличение выпуска обуви при этом, может быть достигнуто за счет

специализации цехов фабрики на производстве отдельных видов мужской обуви, сокращении непроизводственных затрат времени на переналадку станков и оборудования.

Таблица 11.1

Расход материалов и затраты на производство обуви

Выпускаемая обувь	Удельный расход материалов				Затраты на 1 пару обуви, грн.
	Клея, г	Ниток, м	Кожа верха обуви, дм ²	Кожа подкладки, дм ²	
Туфли мужские	50	8	22,5	15,4	40
Полуботинки мужские	60	8	28,5	20,4	50
Ботинки мужские	65	10	30,5	21,5	70

На установленном в первом цехе технологическом оборудовании выпускается в смену туфель мужских 400 пар, полуботинок мужских 300 пар и ботинок мужских 30. На оборудовании второго цеха выпускается туфель мужских 350 пар, полуботинок мужских 300 пар и ботинок мужских 250 пар. На оборудовании третьего цеха выпускается туфель мужских 300 пар, полуботинок мужских 300 пар и ботинок мужских 300 пар.

Специализация этих цехов на производстве какого-либо одного вида мужской обуви дала бы возможность значительно увеличить объем ее выпуска. Так, производственные мощности первого цеха позволяют изготавливать 1200 пар туфель мужских или 900 пар мужских полуботинок или 880 пар ботинок. Мощности второго цеха – 1100 пар мужских туфель или 1100 пар полуботинок или же 850 пар ботинок, мощности третьего цеха – 1000 пар мужских туфель, 900 пар ботинок или 900 пар ботинок.

§ 11.1. Моделирование специализации предприятия

Для производства мужской обуви в требуемых объемах цехам на каждую из смен необходимо выделять 178,5 кг клея, 266 000 м ниток, 858,1 м² кожи для верха обуви и 602,7 м² кожи для подкладки.

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф -Я: MIN					ПЕРЕМЕНН.: 12					ДАТА			
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ: 15					Ф. ПЕР.: 7					ВРЕМЯ			
MIN	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	X.9	X.10	X.11	X.12	R	
COST	52000	48000	45000	61600	46500	44000	55000	59500	48000	40000	45000	63000	0	
Y.1	57.5	60	54	57.2	51.75	55	60	55.25	52.5	50	54	58.5	<= 178.5	
Y.2	8.6	9.6	7.2	8.8	7.7	8.8	8	8.5	7.8	8	7.2	9	<= 26.6	
Y.3	265.8	270.0	256.6	268.4	239.4	247.5	313.5	259.3	243.3	224.5	256.5	274.5	<= 858.1	
Y.4	187.3	184.8	183.6	189.2	168.9	169.4	224.1	182.8	171.9	154	183.6	193.5	<= 602.7	
Y.5	400	1200			350	1100			300	1000			<= 1200	
Y.6	300		900		300		1100		300		900		<= 1000	
Y.7	300			880	250			850	300			900	<= 900	

Рис. 11.1. Матрица модели выбора оптимального варианта специализации в формате пакета PLP-2000

Целью решения задачи является нахождение оптимального варианта специализации цехов обувной фабрики, который позволяет при минимальных затратах, обеспечить необходимый объем выпуска мужской обуви.

Матрица модели выбора оптимального варианта специализации в формате пакета PLP-2000 представлена на рис. 11.1. Вектор-столбца-

ми матрицы модели являются варианты специализации, которые наряду с выпуском нескольких моделей мужской обуви, предполагают также выпуск какой-либо одной модели. Ограничениями матрицы модели при этом служат ограничения расхода материалов и выпуска мужской обуви.

ПРИМЕР РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ДАТА 03-17-2004 ВРЕМЯ 20:10:14

MAXIMUM **ВВОДИМ :** X.12 **БАЗИС X :** 3 **ПЕРЕМЕН. :** 12
ИТЕРАЦ : 3 **ВЫВОД. :** **БАЗИС S :** 4 **Ф. ПЕР. :** 7
ТОЧ. INV : 0 **ОЦЕН.** 63000 **COST** 166000 **ОГРАНИЧЕНИЙ:** 7

BASIS	S.1	S.2	S.3	S.4	X.2	X.7	X.12
РЕШЕН.	.3	0	.1	0	1	1	1
ОЦЕН.	0	0	0	0	40	50	70

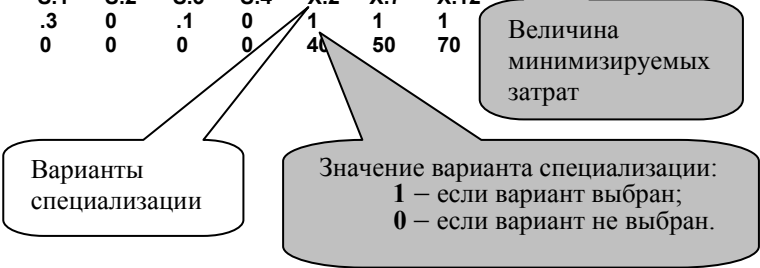


Рис. 11.2. Решение задачи выбора оптимального варианта специализации в формате пакета PLP-2000

Результаты расчетов показывают (рис. 11.2), что оптимальным вариантом специализации цехов обувной фабрики является отказ от одновременного выпуска разных моделей мужской обуви и специализация цехов на выпуске одной модели обуви. При этом, в первом цеху планируется за смену выпускать 1200 пар мужских туфель, во втором цеху – 1100 пар мужских полуботинок и в третьем цеху – 900 пар мужских ботинок. Такого рода решение даст возможность как можно более эффективно использовать имеющиеся производственные мощности и выпускать продукцию в необходимых объемах и с минимальными расходами. Затраты (**COST**) на производство мужских туфель, полуботинок и ботинок в соответствии с полученным оптимальным решением в целом составят 166 000 грн.

**Краткое
повторение**

- ❑ **Специализация предприятия** – повышение технологической однородности производства, сокращение номенклатуры выпускаемой продукции.
- ❑ **Оптимальный вариант специализации** – вариант специализации, учитывающий технические и технологические возможности предприятия.

§ 11.2. Оптимизация ассортимента продукции

**Особенности
оптимизации
ассортимента**

Увеличение выпуска в промышленном производстве, предполагает не только дальнейший рост количества получаемой продукции, но так же расширение и обновление ассортимента. Оптимизация ассортимента выпуска продукции в условиях массового производства, требует решения целого ряда сложных вопросов технологического и организационного порядка.

Характерной особенностью поточного производства является дискретность величины производственной мощности конвейерных потоков и специализация их на выпуске определенного вида продукции. Переход от выпуска одного вида продукции к другому, при этом связан с непроизводительными потерями рабочего времени, вызванными необходимостью переналадки станков и технологического оборудования. Производство отдельных видов продукции, различной сложности, отличается разным количеством расходуемых материалов, затрат рабочего времени, величиной получаемой прибыли.

Предприятия – изготовители продукции должны учитывать спрос на продукцию на рынке, сезонность колебаний объемов выпуска,

возможностей конкурентноспособности продукции, соотнося их с своими производственными возможностями. На основании этого, для каждого из цехов предприятия определяется оптимальный план выпуска продукции.

Модель оптимизации ассортимента продукции

Исходя из организационных и технологических возможностей предприятия и имеющихся ресурсов, а также спроса на рынке, необходимо определить оптимальный ассортимент выпуска продукции, позволяющий получать наибольшую прибыль. Для построения экономико-математической модели задачи оптимизации ассортимента выпуска продукции введем следующие обозначения:

- i – номер цеха предприятия;
- n – число цехов;
- s – вид ресурса;
- m – число всех видов ресурсов;
- b_s – количество имеющегося ресурса s ;
- k – вид выпускаемой продукции;
- l – число всех видов продукции;
- a_{sik} – норма потребления ресурса s при производстве продукции вида k в цехе i ;
- M_k – минимально допустимый объем выпуска продукции вида k ;
- W_k – максимально допустимый объем выпуска продукции вида k ;
- P_{ik} – прибыль от выпуска единицы продукции вида k в цехе i ;
- Z_k – величина суммарных затрат на выпуск продукции вида k ;
- c_{ik} – затраты на выпуск единицы продукции вида k в цехе i ;
- x_{ik} – количество выпускаемой продукции вида k в цехе i .

§ 11.2. Оптимизация ассортимента продукции

Математическая модель задачи состоит в нахождении такого количества выпускаемой продукции x_{ik} , при котором достигается максимальная величина получаемой прибыли

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l P_{ik} x_{ik} \rightarrow \max, \quad (11.6)$$

выполняются необходимые требования по затратам

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l c_{ik} x_{ik} \leq Z_k, \quad (11.7)$$

выпуску продукции

$$M_k \leq \sum_{i=1}^n x_{ik} \leq W_k, \quad k = \overline{1, l}; \quad (11.8)$$

использования ограниченных ресурсов

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l a_{sik} x_{ik} \leq b_s \quad s = \overline{1, m}; \quad (11.9)$$

и условий неотрицательности переменных

$$x_{ik} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, l}. \quad (11.10)$$

Сформулированная модель строится в блочном виде, где блоками матрицы модели выступают цеха предприятия, которые производят весь ассортимент выпускаемой продукции.

Задача выбора оптимального ассортимента продукции

Фабрика специализируется на пошиве верхней одежды. Помимо широкого ассортимента выпускаемой продукции фабрика так же изготавливает и мужскую одежду. Производством этой одежды заняты три цеха предприятия. Во втором

цехе изготавливается мужские пальто, в третьем цехе – мужские плащи и куртки, в шестом цехе – мужские костюмы и пиджаки. Эти цеха шьют одежду трех размеров: 96, 100 и 104. Нормы расхода ткани и затраты времени на изготовления различных моделей одежды приведены в табл. № 11.2. Исходя из производственных возможностей

Таблица 11.2

Нормы расхода материалов и затрат времени

Модели и размеры мужской одежды		Расход ткани, м ²					Затраты времени
		драп	поли-эфирная	смесовая	шерстяная	подкладочная	
Пальто	96	2,81	–	–	–	2,71	2,64
	100	2,82	–	–	–	2,72	2,64
	104	2,83	–	–	–	2,73	2,64
Плащ	96	–	2,71	–	–	2,61	2,47
	100	–	2,72	–	–	2,62	2,47
	104	–	2,73	–	–	2,64	2,47
Куртка	96	–	–	1,62	–	–	1,52
	100	–	–	1,63	–	–	1,52
	104	–	–	1,64	–	–	1,52
Костюм	96	–	–	–	2,81	2,11	3,36
	100	–	–	–	2,82	2,12	3,36
	104	–	–	–	2,83	2,13	3,36
Пиджак	96	–	–	–	1,82	1,61	2,22
	100	–	–	–	1,83	1,62	2,22
	104	–	–	–	1,84	1,63	2,22

цехов и спроса на мужскую одежду предприятием планируется ежемесячно выпускать пальто – 1320, плащей – 1185, курток – 390, костюмов – 700 и пиджаков – не менее 526 каждого размера. Для изготовления такого количества верхней одежды цехам предприятия

§ 11.2. Оптимизация ассортимента продукции

выделено: второму цеху – 11280 м² драпа и 10880 м² подкладочной ткани, третьему цеху – 9680 м² полиэфирной, 1920 м² смесовой и 9350 м² подкладочной ткани, шестому цеху – 8810 м² шерстяной и 7090 м² подкладочной ткани. Планируется, что в текущем месяце цеха предприятия будут работать 22 дня в одну смену. Затраты на производство продукции не должны превышать 3865 тыс. грн.

Таблица 11.3

Экономические показатели производства одежды

Экономические показатели		Модель мужской одежды				
		пальто	плащ	куртка	костюм	пиджак
Себестоимость, тыс. грн.	96	0.4510	0.3015	0.710	0.2960	0.1772
	100	0.4520	0.3016	0.712	0.2961	0.1774
	104	0.4530	0.3017	0.714	0.2962	0.1776
Прибыль, тыс. грн.	96	0.1340	0.1001	0.283	0.0996	0.5590
	100	0.1342	0.1004	0.284	0.0997	0.5600
	104	0.1344	0.1008	0.286	0.0998	0.0561

Величина получаемой прибыли и затраты на производство мужской одежды зависят от модели и размеро-роста. Данные о себестоимости продукции и величине получаемой прибыли по каждой из моделей выпускаемой мужской одежды и размерам приведены в табл. 11.3. Исходя из условий задачи необходимо оптимизировать ассортимент выпускаемой фабрикой мужской одежды с тем, чтобы иметь возможность получить наибольшую прибыль.

Матрица модели оптимизации ассортимента выпуска продукции имеет блочную форму, где в качестве отдельных блоков выступают цеха предприятия. Каждый из блоков матрицы модели содержит ограничения по количеству производимой цехами одежды отдельных моделей и размеров, а также расходуемой ткани и фонду рабочего времени. В наиболее общем виде матрица модели оптимизации

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-Я: MAX															ПЕРЕМЕНН.: 15	ДАТА	12-01-2002
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ: 26															Ф. ПЕР.: 26	ВРЕМЯ	20:10:14
MAX	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	X.9	X.10	X.11	X.12	X.13	X.14	X.15	RHS		
RETURN	.1340	.1342	.1344	.1001	.1004	.1008	.0283	.0284	.0286	.0996	.0997	.0998	.0559	.0560	.0561	0		
Y.1	1																>=1320	
Y.2		1															>=1320	
Y.3			1														>=1320	
Y.4	2.81	2.82	2.83														<=11280	
Y.5	2.71	2.72	2.73														<=10880	
Y.6	2.64	2.64	2.64														<=10560	
Y.7				1													>=1185	
Y.8					1												>=1185	
Y.9						1											>=1185	
Y.10							1										>=390	
Y.11								1									>=390	
Y.12									1								>=390	
Y.13				2.71	2.72	2.73											<=9680	
Y.14							1.62	1.63	1.64								<=1920	
Y.15				2.61	2.62	2.63											<=9350	
Y.16				2.47	2.47	2.47	1.52	1.52	1.52								<=10560	
Y.17										1							>=700	
Y.18											1						>=700	
Y.19												1					>=700	
Y.20													1				>=526	
Y.21														1			>=526	
Y.22															1		>=526	
Y.23										2.81	2.82	2.83	1.82	1.83	1.84		<=8810	
Y.24										2.11	2.12	2.13	1.61	1.62	1.63		<=7009	
Y.25										3.36	3.36	3.36	2.22	2.22	2.22		<=10560	
Y.26	.451	.452	.453	.3015	.3016	.3017	.071	.0712	.0714	.296	.2961	.2962	.1772	.1774	.1776		<=3865	

Рис.11.3. Матрица модели оптимизации ассортимента выпуска продукции в формате пакета PLP-2000

ассортимента выпуска продукции представлена на рис.11.3. Вектор-столбцами матрицы модели являются способы производства мужской одежды, ограничения – планируемое количество производства моделей одежды, расходуемое количество тканей и фонд рабочего времени. Матрица имеет блочно-диагональную структуру и состоит из трех основных блоков. Каждый цех предприятия представлен в матрице модели в виде отдельного блока числовых коэффициентов.

§ 11.2. Оптимизация ассортимента продукции

Размерность блоков матрицы модели определяется количеством входящих в них вектор-столбцов и ограничений. Так например, блок числовых коэффициентов второго цеха содержит три вектор-столбца, что определяется выпуском мужских пальто трех размеро-ростов и шесть неравенств, которые определяются тремя ограничениями по выпуску пальто, двумя ограничениями по расходу ткани и ограничением фонда рабочего времени. Количество выпускаемых пальто при этом, определяется значением переменных $X.1 - X.3$, а расхода ткани и затрат рабочего времени – ограничениями $Y.4 - Y.6$. Блок числовых

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ	ДАТА 03-17-2004	ВРЕМЯ 21:28:44
MAXIMUM	ВВОДИМ:	БАЗИС X: 15	ПЕРЕМЕНН.: 15
ТОЧЕК: 22	ВЫВОД:	БАЗИС S: 11	Ф.ПЕР.: 26
ТОЧ. INV: 0	ОЦЕН. 0	RETURN 1224.89	ОГРАНИЧЕНИЙ: 26

BASIS	X.1	X.2	X.3	S.1	S.26	S.5	X.4	X.5	X.6
	X.7	X.8	X.9	S.13	S.14	S.9	X.10	X.11	X.12
	X.13	X.14	X.15	S.17	S.24	S.3			
РЕШЕН.	1340	1320	1340	20	.3582	0	1185	1185	1185
	390	390	390	9.571	12.9	35.1	0	700	700
	526	526	526	0	.4448	.5291	20		
ОЦЕН	0	0	0	.02	0	.0295	-.0007	-.0004	0
	-.0337	-.0336	-.0334	0	0	.0408	0	-.0003	-.0005
	-.0086	-.0089	-.0091	.0354	0	0	0		

Рис. 11.4. Решение задачи оптимизации ассортимента выпуска продукции в формате пакета PLP-2000

коэффициентов матрицы модели третьего цеха включает шесть вектор-столбцов и десять ограничений. Переменные $X.4 - X.9$ показывают количество выпускаемых плащей и курток трех размеро-ростов, а ограничения $Y.7 - Y.16$ определяют объем их выпуска, количество имеющейся ткани и фонд рабочего времени. Блок задаваемых в модели числовых коэффициентов шестого цеха имеет шесть вектор-столбцов и девять ограничений. Переменные $X.10 - X.15$ показывают количество выпускаемых цехом костюмов и пиджаков, а ограничения $Y.23 - Y.25$ определяют количество имеющейся ткани и фонд рабочего времени.

Неравенство $\gamma.26$ является общим для всех трех блоков матрицы модели и представляет собой ограничение затрат на продукцию.

Анализ результатов расчетов оптимизации ассортимента выпуска продукции (рис.11.4) показывает, что плановое задание по изготовлению мужской одежды цехами фабрики в целом будет выполнено. Второй цех пошьет мужских пальто трех размеро-ростов в количестве 1320 шт. Значение искусственной переменной $s.1$ показывает, что дополнительно к 1320 пальто 96 размера будет пошито еще 20 пальто. Количество пальто 96 размера при этом, $(x.1 + s.1)$ составит 1340 шт. В соответствии с оптимальным планом в третьем цехом будет произведено мужских плащей 1185 и курток 390 каждого размеро-роста. При этом, остаток полиэфирной ткани ($s.13$) составит $9,571 \text{ м}^2$, смесовой ($s.14$) $12,9 \text{ м}^2$ и подкладочной ($s.15$) $35,1 \text{ м}^2$. Шестой цех изготовит 700 мужских костюмов и 526 мужских пиджаков каждого из размеро-ростов. При этом остаток подкладочной ткани составит ($s.24$) $0,4448 \text{ м}^2$. Не используемое время ($s.25$) будет $0,5291$ часа. Затраты на выпуск продукции будут в целом снижены ($s.26$) на $358,2$ тыс. грн. Корректирование полученного оптимизационного решения с использованием двойственных оценок показывает, что в условиях дефицитности ресурсов наиболее целесообразным является увеличение выпуска мужских пальто ($s.1$) на 20 шт. Увеличение выпуска других моделей мужской одежды в этих условиях привело бы к снижению величины получаемой прибыли на каждую единицу продукции, произведенную сверх плана.

Краткое повторение

- Оптимизация ассортимента продукции** – выбор варианта расширения и обновление ассортимента продукции с учетом организационно-технологических особенностей производства и имеющегося спроса.
- Дискретность производственных мощностей** – отдельные значения величины производственной мощности конвейерных потоков специализирующихся на выпуске определенного вида продукции.

§ 11.3. Моделирование диверсификации производства

Диверсификация производства продукции

Диверсификация производства представляет собой расширение номенклатуры выпуска продукции. Она осуществляется как за счет внутриотраслевого обновления ассортимента выпуска продукции, так и разнообразия продукции отдельных технологически не связанных между собой производств. Диверсификация производства может осуществляться в двух основных формах:

- расширения ассортимента внутриотраслевого выпуска продукции и за счет увеличения количества производимых модифицированных изделий. Целью этого является как можно более полное удовлетворение потребностей отдельных групп потребителей;

- увеличения разнообразия выпускаемой продукции за счет создания новых производств, проникновения в новые отрасли и сферы хозяйствования. В результате этого осуществляется переход от производства какого-либо одного продукта или группы продуктов к широкому ассортименту выпускаемой продукции.

Если в первом случае целью производителей продукции является получение определенных конкурентных преимуществ перед другими предприятиями – конкурентами, то во втором случае они стремятся обезопасить себя от возможных непредвиденных изменений спроса в условиях рынка. В результате этого, диверсифицированные предприятия становятся значительно более стойкими и конкурентноспособными, чем узкоспециализированные предприятия. Одним из результатов диверсификации является появление многопрофильных производств, которые объединяют в себе производства разных отраслей промышленности, технологически не связанных между собой.

Модель диверсификации производства

Модель диверсификации производства может быть формализована и представлена в следующем виде – исходя из производственных возможностей предприятия: площади цехов, складских помещений, средств инвестируемых в производство, количества выпускаемой продукции и величены получаемой прибыли

необходимо определить возможные варианты расширения ассортимента выпуска продукции.

Для построения экономико-математической модели задачи введем следующие обозначения:

- i – вид ресурсов;
- l – число видов ресурсов;
- j – технологический способ производства продукции;
- n – число технологических способов производства;
- b_i – количество имеющихся ресурсов;
- b_k – количество необходимого выпуска продукции k ;
- a_{ij} – нормативный коэффициент затрат ресурсов i на выпуск продукции с использованием технологического способа производства j ;
- d_{kj} – количество продукции k получаемой с использованием технологического способа производства j ;
- c_j – прибыль от выпуска единицы продукции полученной с использованием технологического способа производства j ;
- x_j – количество продукции получаемой по технологическому способу производства j .

Математическая модель. Найти оптимальный вариант расширения ассортимента выпускаемой продукции, позволяющий максимизировать величину получаемой прибыли

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (11.11)$$

при ограничениях: количества потребляемых ресурсов

$$\sum_{j=1}^n d_{kj} x_j \leq b_k, \quad k = \overline{1, l}; \quad (11.12)$$

производства продукции

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m-l}; \quad (11.13)$$

§ 11.3. Моделирование диверсификации производства

выбора вариантов расширения ассортимента

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 1 \quad (11.14)$$

и условия неотрицательности переменных

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (11.15)$$

Постановка задачи и анализ результатов решения

Производство 67 200 пар обуви на фабрике осуществляется четырьмя специализированными потоками выпускающими по 16 800 пар каждый. Производство обуви происходит на площади 1200 м². Площадь складских помещений равняется 280 м².

Ежемесячная прибыль от производства обуви составляет 672 тыс. грн.

Таблица 11.4

Расход ресурсов и выпуск продукции

Требуемые ресурсы и выпуск продукции	Ассортимент производства продукции				
	обувь	окна	мебель	тара	ПК
Производственные площади, м ²	300	200	250	200	250
Площади складских помещений, м ²	60	40	80	40	60
Инвестиции, тыс. грн.	80	120	100	100	80
Выпуск продукции, шт.	16800	840	1680	10080	420
Прибыль, тыс. грн.	168	180	160	120	240

Наблюдаемая на протяжении последнего периода времени устойчивая тенденция к снижению спроса на обувь требует принятия ряда

неотложных мер по переориентации предприятия на выпуск других видов продукции. В связи с этим, планируется сократить объем выпуска обуви до 16800 пар в месяц. На высвобожденных производственных площадях наряду с выпуском обуви предполагается наладить производство 840 металлопластиковых окон, 1680 комплектов мебели, 10080 ящиков полиэтиленовой тары и сборку 420 персональных компьютеров. Данные о требуемых ресурсах, нормах их расхода и количестве выпускаемой продукции приведены в табл. 11.4. Здесь также дана величина прибыли получаемой от выпуска продукции по каждому ее виду.

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф –Я:					МАХ	ПЕРЕМЕН.: 10	ДАТА 03-18-2004
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ:					8	Ф. ПЕР.: 5	ВРЕМЯ 12:48:44
МАХ	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5			RHS
RETURN	168	180	160	120	240			0
Y.1	300	200	250	200	250			<= 1200
Y.2	60	40	80	40	60			<= 280
Y.3	80	120	100	100	80			<= 480
Y.4	16800							<= 16800
Y.5		840						<= 840
Y.6			1680					<= 1680
Y.7				10080				<= 10080
Y.8					420			<= 420

Рис.11.5. Матрица модели диверсификации производства продукции в формате пакета PLP-2000

В задаче необходимо с учетом инвестируемых в предприятие 480 тыс. грн найти оптимальный вариант диверсификации производства за счет освоения выпуска новых видов продукции.

Матрица модели диверсификации производства продукции в формате пакета PLP-2000 представлена на рис.11.5. Вектор-столбцами матрицы модели служат альтернативные технологические способы производства. Ограничениями матрицы модели – ограничения производственных площадей (Y.1), площади складских помещений (Y.2), инвестируемых средств (Y.3) и выпуска продукции (Y.4 –Y.8).

§ 11.3. Моделирование диверсификации производства

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ	ОПТИМАЛЬНОЕ	ДАТА	03-06-2003	ВРЕМЯ	12:48:44		
MAXIMUM	ВВОДИМ :	БАЗИС X :	5	ПЕРЕМЕН. :	5			
ИТЕРАЦ :	6	ВЫВОД. :	БАЗИС S :	3	Ф. ПЕР. :	5		
ТОЧ. INV :	0	ОЦЕН. 0	RETURN	868	ОГРАНИЧЕНИЙ:	8		
BASIS	X.4	S.2	S.3	X.1	X.2	X.3	S.4	X.5
РЕШЕН.	1	0	0	1	1	1	0	1
ОЦЕН.	.56	0	0	0	.081	.0119	.0008	.2381

Рис. 11.6. Решение задачи диверсификации производства продукции в формате пакета PLP-2000

Результаты расчетов (рис.11.6) показали, что диверсификация производства даст возможность ежемесячно получать прибыль в размере 868 тыс. грн. Эта прибыль на 196 тыс. грн. больше той прибыли, которую получало предприятие от выпуска одной только обуви. Для этого необходимо ежемесячно выпускать 16800 пар обуви, 840 металлопластиковых окон, 1680 комплектов мебели, 10080 шт. полиэтиленовой тары и собирать 420 персональных компьютеров.

Краткое повторение

- ❑ **Диверсификация производства продукции** – расширение номенклатуры выпускаемой продукции за счет одновременного развития многих не связанных друг с другом производств.
- ❑ **Диверсификация внутриотраслевого выпуска продукции** – увеличение количества производимых модифицированных изделий, целью которой является как можно более полное удовлетворение потребностей отдельных групп потребителей.
- ❑ **Диверсификация специализации предприятия** –

расширение ассортимента выпуска за счет объединения технологически не связанных производств разных отраслей промышленности.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

ассортимент продукции вариант специализации двойственные оценки диверсификация производства дискретность производственной мощности конкурентоспособность	конкурентные преимущества многопрофильные производства номенклатура продукции специализация предприятия узкоспециализированные предприятия
---	--

***Контрольные вопросы
и задания***



1. Особенности моделирования специализации предприятия.
2. Модель выбора оптимального варианта специализации.
3. Постановка и решение задачи выбора варианта специализации предприятия.
4. Оптимизация ассортимента продукции и ее особенности.
5. Модель оптимизации ассортимента выпуска продукции.
6. Задача выбора оптимального ассортимента выпуска продукции и ее решение.
7. Моделирование диверсификации производства.
8. Решите рассмотренные задачи на компьютере.

Глава 12 МНОГО- КРИТЕРИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

В этой главе представлены особенности постановки и решения многокритериальных задач. В ней рассмотрены основные принципы построения многокритериальных моделей. Показаны возможности решения многокритериальной задачи оптимизации ассортимента выпуска продукции с помощью метода последовательной уступки.

§ 12.1. Многокритериальность моделей

Альтернативность вариантов выбора

Совершенствование организации и управления современным производством требует решения целого ряда сложных проблем, связанных с множественностью возможных вариантов его развития. Это, прежде всего, продиктовано определенной *свободой выбора*, т. е. наличием некоторого числа альтернативных вариантов принятия решений. Эти варианты, могут отличаться различной эффективностью полученных результатов или тех последствий (исходов), к которым они приводят. Каждый из выбранных вариантов характеризуется определенной степенью достижения поставленной цели, что очень важно для менеджера принимающего ответственное решение. У него есть свое виденье проблемы, своя оценка полученных результатов, присущих им достоинств и недостатков, т. е. имеются определенные сложившиеся предпочтения. Поэтому, менеджер заинтересован в выборе таких альтернативных вариантов, которые кажутся ему наилучшими в соответствии с уже сложившимися у него определенными представлениями. Однако в сложных реальных ситуациях представления менеджера, принимающего решение, относительно стоящих перед ним задач, обычно оказываются неполными и нечеткими. Это не дает возможности целиком проанализировать различные варианты по-

лученных решений, оценить последствия результатов их реализации отдельных альтернативных вариантов, а значит, и сформулировать критерий выбора или целевую функцию.

Принципиальная трудность осуществления выбора для такого рода многовариантных задач заключается в неопределенности понятия “наилучший альтернативный вариант”. Для каждой такой задачи возникает вопрос: в каком смысле этот выбор является наилучший? Если для однокритериальных задач вопрос об оптимальности выбора решений не возникает вовсе, поскольку само понятие выбора лишено всякого смысла, то для многокритериальных задач он представляет особую значимость. Основная трудность нахождения многокритериальных решений для детерминированных задач связана с отсутствием таких скалярных показателей, с помощью которыми может быть оценено качество альтернативных вариантов решений. При этом часто оказывается возможным провести содержательную декомпозицию цели по ее отдельным аспектам на подцели и ввести

***Критерий** – признак, на основании которого производится оценка, сравнение альтернатив различных решений.*

показатели (критерии), характеризующие степень достижения подцелей в рамках данной задачи. В таких ситуациях возникает проблема оценки и сравнения предпочтительности различных вариантов решений с учетом нескольких критериев – многокритериальная задача принятия решений. При этом следует учитывать, что не существует наилучшего в каком-либо абсолютном смысле решения. Для этого, чтобы в трудной и часто уникальной ситуации, иметь возможность выделить наиболее важные аспекты решаемой задачи, строится многокритериальная модель. Использование модели позволяет провести объективный анализ и сравнение альтернативных вариантов с учетом самых различных аспектов многокритериальной задачи. Поиск средств формализации многокритериальных задач является одним наиболее из перспективных направлений моделирования.

**Принципы
многокритериальности
построения моделей**

При постановке и решении многокритериальных задач чрезвычайно важную роль играет учет большого количества содержательных обстоятельств и представлений, которым трудно порой дать строго математическое обоснование.

Вопрос о том, какие критерии следует учитывать в данной конкретной задаче, все ли допустимые решения приняты во внимание, а какие лежат вне математической постановки задачи. В то же время разработка методов выделения наиболее предпочтительных решений невозможна без использования точных методов, которые применимы не к реальным задачам, а к их формализованным моделям.

Таким образом, модельный подход к решению конкретных многокритериальных задач связан с тем, что содержательные соображения, не поддающиеся строгой формализации, и формализованные модели должны использоваться совместно. Только такой подход может привести к практически полезным результатам.

Сформулируем ряд основных положений, которые учитывают при построении многокритериальных моделей. Эти положения подчеркивают важнейшие специфические свойства моделей.

1. Модель создается для содержательной декомпозиции цели на отдельные подцели, в соответствии с рассматриваемыми аспектами решаемой проблемы, что предполагает введение ряда важнейших показателей (критериев), характеризующих степень достижения отдельных локальных целей.

2. Модель должна быть логически непротиворечивой.

3. Модель должна содержать описание всех важнейших элементов задачи принятия решений, их свойств.

4. Модель должна давать возможность использования реальной информации о решаемой задаче, получаемой от экспертов и менеджеров, принимающих решение.

5. Модель должна быть достаточно простой и удобной для анализа полученных результатов.

Построение многокритериальных экономико-математических моделей связано с необходимостью всестороннего учета влияния

различных факторов в области экономики, организации и управления производством. Не могут быть оставлены без внимания и вопросы связанные с продвижением готовой продукции на рынке. Следствием пренебрежения этими факторами при решении многокритериальных задач, является некорректность построения модели, неправильность результатов расчетов, потеря какого-либо интереса к ним.

Множество допустимых решений

Допустимые варианты решений рассматриваются как возможные способы достижения поставленной цели. Если имеется какое-либо допустимое решение, то проблемы принятия решений не возникают. Значительно сложнее обстоит дело тогда, когда этих решений может быть множество. Универсальных методов формирования множества допустимых вариантов решений не существует. Допустимые решения формируются на основе информации о реальной ситуации и имеющихся в задаче ограничений, а также исходя из практического опыта менеджеров, экспертов и консультантов.

Во многих задачах множество допустимых решений может быть сформулировано на основе морфологического анализа. Его суть заключается в том, что проблема, которую следует решить, разбивается на ряд независимых подпроблем (уровней). Затем для каждого уровня определяются возможные способы решения подпроблем (элементы уровня). Вариантом решения является набор элементов, в который входит в точности один элемент с каждого уровня. Для каждой пары элементов разных уровней определяется возможность их совместного включения в один из вариантов решения. Выявление недопустимых сочетаний позволяет значительно сократить количество вариантов решений.

Морфологический анализ дает возможность описывать варианты решения в содержательных терминах, выявлять новые варианты, а также использовать компьютер для выявления множества допустимых решений и их последующей оценки. Основная трудность применения морфологического анализа связана с неоднозначностью разбиения рассматриваемой проблемы на отдельные подпроблемы.

Кроме того, при формировании множества допустимых решений может использоваться метод “коллективной генерации идей” (метод “мозгового штурма”), а также построение “дерева целей”. Построение

дерева целей позволяет сформировать множество допустимых решений на основе альтернативных способов реализации целей нижнего уровня. В последнее время при формировании множества допустимых решений все чаще используется имитационное моделирование.

**Формирования
множества
критериев**

Множество критериев формируется в результате исследования, направленного на выявление показателей, характеризующих такие свойства принимаемых решений или их последствий, которые отвечают поставленной цели. В каждой задаче возникает проблема определения необходимого и достаточного числа критериев (полного набора критериев), который охватывал бы все важнейшие стороны задачи. Принято считать, что набор критериев является *полным*, если использование любых дополнительных критериев не изменяет результатов решения задачи, а отбрасывание хотя бы одного из выбранных критериев приводит к изменению результатов.

Формирование полного перечня критериев представляет собой довольно сложную многошаговую процедуру, которая проводится разработчиками многокритериальной модели совместно с экспертами. Эта процедура не может быть целиком формализована, так как основная часть необходимой информации может быть получена только путем опроса экспертов и менеджеров, принимающих решение.

Независимо от способа формирования набора критериев в многокритериальной задаче он должен удовлетворять определенным требованиям:

- *полнота*. Набор критериев является полным, если изменение их числа в сторону уменьшения или увеличения не могут ни как существенно повлиять на результаты оптимизационных решений;

- *операциональность*. Каждый критерий должен иметь четкую формулировку, ясный и однозначный смысл, характеризовать вполне определенный аспект решаемой проблемы;

- *декомпозиционность*. Набор критериев должен обеспечивать возможность упрощения задачи оценки предпочтений путем разбиения первоначальной задачи на отдельные более простые части (подзадачи);

- *неизбыточность*. Различные критерии из набора не должны учитывать одни и те же аспекты проблемы;

- *минимальность*. Набор должен содержать как можно меньше количество критериев;

- *измеримость*. Каждый из критериев должен допускать возможность оценки (количественной или качественной) интенсивности характеризуемого им свойства (степени достижения цели).

Разумеется, эти требования являются довольно противоречивыми, и не могут быть удовлетворены все одновременно. Требование минимальности ориентировано на агрегирование критериев, что часто приводит к противоречию с требованиями операциональности и измеримости; поскольку агрегированный критерий обычно имеет менее понятный и однозначный смысл, его трудно измерять. С другой стороны, требования полноты и операциональности ориентируют на декомпозицию критериев на элементарные (легко отличимые друг от друга), что приводит к увеличению количества критериев в наборе. Поэтому при формировании набора критериев в реальных задачах для удовлетворения этих требований приходится идти на компромиссы.

Краткое повторение

- ❑ **Критерий** – признак, на основании которого производится оценка, сравнение альтернатив различных решений.
- ❑ **Альтернативность выбора** – множественность возможных вариантов определяемая “свободой выбора”, наличием некоторого числа альтернативных решений.
- ❑ **Принципы многокритериальности** – ряд основных положений, учитываемых при построении многокритериальных моделей.

- ❑ **Множество допустимых решений** – множество вариантов решений, которое представляет всевозможные способы достижения поставленной цели.
- ❑ **Множество критериев** – необходимое и достаточное число критериев, которое охватывает все важнейшие стороны решения задачи.

§ 12.2. Многокритериальность выбора

Выбор принципа оптимальности

При построении многокритериальных моделей возникает ряд специфических проблем, носящих не формальный а концептуальный характер. Главными из которых является выбор принципа оптимальности, определение свойств оптимального решения, дающего ответ на основной вопрос – в каком смысле данное оптимальное решение лучше всех остальных решений (превосходит другие решения). Это, требует как можно более тщательного исследования как самих критериев, так и взаимоотношений между ними (одни критерии противоречат друг другу, другие, наоборот, действуют в одном направлении, третьи – индифферентны, безразличны друг к другу).

Вполне очевидно, что одновременное достижение цели по всем критериям за счет выбора одной какой-либо единой стратегии невозможно. Выход в том, чтобы прибегнуть к некоторому компромиссу в достижении локальных целей. Поэтому, менеджер в начале должен сформулировать для себя некоторые принципы компромисса в достижении отдельных поставленных целей (другой употребляемый термин – *схема компромисса*) и придерживаться его в дальней при выборе оптимальной стратегии. Этот выбор должен отвечать двум важнейшим условиям: стратегия должна быть осуществимой, т. е. принадлежать некоторому множеству Ω_x ее допустимых значений,

стратегия должна быть наилучшей в смысле принятого в задаче принципа компромисса.

Однокритериальные оптимизационные задачи значительно проще. В них принцип оптимальности является единственным и общим для всех задач: в качестве оптимального принимается такое решение, для которого значение целевой функции является максимальным. Для них имеется множество различных принципов компромисса и соответствующих им принципов оптимальности, ведущих к выбору различных оптимальных решений. Это предъявляет серьезные требования к выбору принципа оптимальности.

Определение области компромисса

Основной из особенностей построения многокритериальной модели является имеющееся противоречие между некоторыми из критериев. Это противоречие не является достаточно строгим, так как иначе задача становится конфликтной – антагонистической. В силу этого, область допустимых решений Ω_x неизменно распадается на две непересекающиеся части: *область согласия* Ω_x^c и *область компромисса* Ω_x^k . Для *области согласия* каких-либо противоречий между критериями не существует. Качество полученного решения при необходимости может быть улучшено одновременно по всем критериям или во всяком случае, без снижения уровня любого из критериев. В *области компромисса* есть противоречие между некоторыми критериями: улучшение качества решения по одним критериям ухудшает качество решения по другим. Очевидно, что оптимальное решение может принадлежать *области компромисса*, так как в *области согласия* решение может и должно быть улучшено по всем критериям. Следовательно, поиск оптимального решения надо ограничить только *областью компромисса* Ω_x^k . Одной из важнейших проблем возникающих при этом, является выделение *области компромисса* из *области допустимых* решений. Выделение *области компромисса* обычно является первым этапом решения многокритериальных задач. Важный практический результат этого этапа – сужение области возможных решений, что уже само по себе улучшает качество полученных решений. В отдельных случаях поиск оптимальных решений с приемлемой для практики точностью можно ограничить выделением области компромисса.

**Выбор
схемы
компромисса**

Поиск возможного оптимального решения многокритериальной задачи может быть осуществлен только на основе некоторой *схемы компромисса*. Число возможных схем компромисса достаточно велико и его трудно предусмотреть заранее. Выбор схемы компромисса является сложной концептуальной проблемой. Рассмотрим ряд основных принципов компромисса.

Принцип равномерности. Этот принцип заключается в стремлении к равномерному и гармоничному повышению качества операции по всем локальным критериям. Данный принцип компромисса имеет несколько разновидностей.

- *Принцип равенства.* Наилучшим компромиссным решением считается такое, при котором достигается равенство всех локальных критериев.

- *Принцип максимина.* Идея равномерности проявляется в стремлении повышать уровень всех критериев за счет “подтягивания” наихудшего из критериев (значение которого наименьшее). Данный принцип часто называют принципом “гарантированного уровня”.

- *Принцип квазиравенства.* Идея равенства, высказанная, как и в *принципе равенства*, приводится приближенно с точностью до заранее заданной величины отклонения. Решение считается наилучшим, если значения отдельных локальных критериев отличаются друг от друга не больше чем на величину отклонения.

Принципы справедливой уступки. Различают две основные разновидности этого принципа: принцип абсолютной уступки и принцип относительной уступки. Оба они основаны на оценке и сопоставлении прироста и убыли уровня локальных критериев, которые в области компромисса неизбежны.

- *Принцип абсолютной уступки.* Данный принцип гласит: справедливым является такой компромисс, при котором суммарный абсолютный уровень снижения одного или нескольких критериев не превосходит суммарного абсолютного уровня повышения критериев. Недостаток этого принципа состоит в том, что он допускает резкую дифференциацию уровней отдельных критериев, так как высокое

значение интегрального критерия может быть получено при сравнительно малых значениях других критериев.

• *Принцип относительной уступки.* Положение о справедливой относительной уступки говорит о том, что справедливым является такой компромисс, при котором суммарный относительный уровень снижения качества одного или нескольких критериев не превосходит суммарного относительного уровня повышения качества по остальным критериям. Принцип относительной уступки весьма чувствителен к величине критериев, причем за счет относительной уступки происходит автоматическое снижение “цены” уступки для локальных критериев с большой величиной и наоборот. В результате проводится значительное сглаживание уровней локальных критериев. Важным преимуществом принципа относительной уступки является также то, что он инвариантен к масштабу измерения критериев.

Принцип выделения главного критерия. В этом случае из совокупности локальных критериев k_1, k_2, \dots, k_m выделяется один, например k_1 и принимается в качестве главного критерия. К уровням остальных локальных критериев предъявляется требование, чтобы они были не меньше некоторых заданных значений.

Принцип последовательной уступки. Предположим, что показатели эффективности расположены в порядке убывающей важности: сначала основной k_1 , затем вспомогательные k_2, k_3, \dots . Для простоты будем считать, что каждый из них нужно обратить в максимум (если это не так, достаточно изменить знак показателя). Процедура построения компромиссного решения при этом сводится к следующему. Сначала ищется решение, обращающее в максимум главный показатель эффективности k_1 . Затем назначается, исходя из практических соображений и точности с какой получены исходные данные, некоторая “уступка” Δk_1 , которую мы согласны допустить, чтобы обратить в максимум второй показатель k_2 . Налагаем на величину целевой функции максимизирующую значение критерия k_1 ограничение, чтобы его величина k_1 была не меньше, чем $k_1 - \Delta k_1$ и при этом ограничении ищем решение, обращающее в максимум k_2 . Далее снова назначается уступка в показателе k_2 , ценой которой можно максимизировать k_3 и т. д.

Такой способ построения компромиссного решения хорош тем,

что здесь сразу видно, ценой какой “уступки” в одном показателе приобретается выигрыш в другом. Свобода выбора решения, приобретаемая ценой даже незначительных “уступок”, может оказаться существенной, так как в районе максимума (минимума) обычно эффективность решения меняется очень слабо.

Нормализация критериев оптимальности

Эта проблема возникает в тех задачах, в которых локальные критерии имеют разные единицы измерения. Необходимо нормализовать критерии, т. е. привести их к единому, желательно безразмерному масштабу измерения. Нормализация критериев является сложной концептуальной проблемой. Она возникает при решении всех многокритериальных оптимизационных задач. Исключения составляют те задачи, где в качестве принципа компромисса принимается принцип суммарной относительной уступки.

Большинство применяемых способов нормализации основывается на введении понятия идеального качества операции, представляемого вектором идеальных значений критериев $K^u = (k_1^u, k_2^u, \dots, k_m^u)$. С помощью вектора K^u вектор критериев K приводится к безразмерной (нормированной) форме:

$$K^u = \left(\frac{k_q}{k_q^u} \right), \quad q \in \overline{1, Q}. \quad (12.1)$$

Очевидно, что каждая компонента вектора K^u принадлежит диапазону $[0; 1]$ (при очевидном условии, что $K^u > 0$). Успешное решение проблемы нормализации во многом зависит от того, насколько правильно и объективно удастся определить “идеальное” качество решений. Способ выбора идеального вектора эффективности K^u определяет и способ нормализации. Рассмотрим некоторые из этих способов.

Способ 1. Здесь идеальный вектор качества определяется заданными величинами критериев, т. е. $K^u = K^z$, $q \in \overline{1, Q}$. Недостатком этого способа является сложность и субъективность назначения K^z ,

что приводит к субъективности оптимального решения.

Способ 2. Здесь в качестве идеального вектора эффективности берется вектор, компонентами которого являются максимально возможные значения локальных критериев. Недостатком подобного способа нормализации является то, что он существенно зависит от максимально возможного уровня критериев, определяемых условиями задачи. В результате равноправие критериев нарушается и предпочтение автоматически отдается критерию с наибольшей величиной локального критерия.

Способ 3. Здесь в качестве компоненты k_q^u , $q \in \overline{1, Q}$ идеального вектора K^u принимается максимально возможный разброс соответствующего локального критерия $k_q^u = \max k_q - \min k_q$.

Известны и другие способы нормализации критериев, однако они применяются крайне редко.

Учет приоритета критериев

Обычно локальные критерии имеют различную важность. Это следует учитывать при выборе оптимального решения, отдавая известное предпочтение более важным критериям. На практике эта проблема сводится к корректировке выбранной схемы компромисса. Имеется два основных подхода к учету приоритета критериев для решаемых многокритериальных задач: принцип *жесткого* и принцип *гибкого* учета приоритета.

Принцип жесткого учета. Этот принцип состоит том, что по степени важности критерии располагаются в строгой последовательности. Условно это записывается в следующем виде $k_1 > k_2 \dots > k_m$. На основе ряда приоритетов проводится последовательная оптимизация критериев. При этом не допускается повышение уровня менее важных критериев, если это вызывает хотя бы незначительное снижение уровня более важного критерия из ряда приоритета. На практике реализация этого принципа сводится к тому, что вначале ищется оптимум для важного критерия. Найденное значение оптимума фиксируется затем в виде дополнительного ограничения, при котором ищется оптимум второго по важности критерия, и т. д. Таким путем проводится постепенное сужение области допустимых решений до единственно важного критерия.

Принцип последовательной оптимизации во многих практических задачах неприменим, так как часто оптимизация по первому, наиболее важному критерию уже приводит к единственному решению. Практически решение сводится к оптимизации по одному, наиболее важному, критерию без учета остальных критериев.

Преимуществом метода жесткого приоритета является то, что он не требует задания количественных характеристик приоритетов критериев, а лишь упорядочивания критериев в ряд приоритетов. Недостаток его состоит в том, что он практически отдает неограниченное предпочтение наиболее важному критерию.

Принцип гибкого учета. Этот принцип предполагает необходимость обязательного задания их количественных характеристик, что позволяет более “справедливо” учитывать “интересы” по каждому из критериев. Практическая реализация принципа гибкого учета приоритета сводится к трансформации пространства критериев, к соответствующему изменению масштабов по каждому критерию, так как теперь вместо критерия k_q выступает критерий с весами, т. е. $\lambda_q k_q$. Затем производится выбор оптимального решения на основании одного из возможных принципов оптимальности, но уже в преобразованном пространстве критериев.

Перечисленные проблемы являются наиболее важными, но они не исчерпывают всего круга проблем, связанных с решением многокритериальных задач. Указанные проблемы (кроме определения области компромисса) носят концептуальный характер. Как известно, при решении концептуальных проблем обычно приходится прибегать к разного рода эвристическим процедурам, в которых существенная роль отводится экспертам. Их решение следует проводить строго формализовано, на основании научной аргументации и при ограниченном и формализованном использовании эвристических процедур.

Краткое повторение

- **Выбор принципа оптимальности** – определение свойств оптимального решения, дающего ответ на основной вопрос, в каком смысле данное

оптимальное решение лучше всех остальных решений (превосходит другие решения).

- ❑ **Определение области компромисса** – установление области достижения конструктивного компромисса в принятии решений.
- ❑ **Выбор схемы компромисса** – выбор стратегии нахождения компромисса, при несовпадении или противоположности целей.
- ❑ **Нормализация критериев оптимальности** – приведение отдельных локальных критериев к единому масштабу измерения.
- ❑ **Учет приоритета критериев** – принятие во внимание значимости отдельных критериев, их первостепенной важности.

§ 12.3. Решение многокритериальной задачи

Многокритериальная задача оптимизации ассортимента

К числу задач, которые решаются с помощью многокритериальной оптимизации, относится и рассмотренная ранее задача оптимизации ассортимента выпуска продукции. Наряду с таким важным критерием как максимизируемая величина прибыли, получаемая от выпуска продукции, в задаче может быть рассмотрена возможность минимизации затрат на производство продукции и максимизация выпуска продукции. Решенная ранее в § 11.2 однокритериальная задача оптимизации ассортимента продукции, является ни чем иным, как частным случаем общей многокритериальной задачи оптимизации ассортимента продукции.

Приоритет критериев решаемой многокритериальной задачи, степень их важности может быть задан как: максимизация величины получаемой прибыли, минимизация затрат, максимизация выпуска продукции. В случае необходимости этот установленный порядок значимости критериев может быть изменен, и критерии будут представлены в ином порядке. При этом очень важно проанализировать направление взаимодействий между критериями (какие критерии противоречат друг другу, какие действуют в одном направлении, а какие индифферентны, безразличны друг к другу). С этой точки зрения, критерий максимизации величины получаемой прибыли и максимизации выпуска продукции лежит в одной плоскости. Что же касается критериев максимизации величины получаемой прибыли и минимизации затрат, то противоречия между этими двумя критериями не являются очень строгими. Это также относится к критериям максимизации выпуска продукции и минимизации затрат. Увеличение прибыли хотя и связано с ростом затрат, в то же время снижение затрат, является необходимым условием повышения прибыли. В отношении критериев максимизации выпуска продукции и минимизации затрат следует сказать, что одновременное улучшение качества получаемого решения по этим двум критериям вряд ли возможно. Поэтому оптимальное решение многокритериальной задачи оптимизации ассортимента выпуска продукции, неизменно будет принадлежать области компромисса, так как решение не может быть одновременно улучшено по всем критериям.

Рассмотрим возможность решения многокритериальной задачи на примере модели оптимизации ассортимента продукции. Матрица модели этой задачи в формате пакета PLP-2000 представлена на рис.11.3. Результаты расчетов показывают, что максимальная величина полученной прибыли составляет 1224,89 тыс. грн. Затраты на выпуск продукции составляют $3865 - S.26 = 3506,8$ тыс. грн. Для минимизации величины затрат на производство мужской одежды в требуемых объемах при решении этой задачи используем метод последовательной уступки. Сущность этого метода состоит в том, что в начале находится решение по одному из наиболее важных критериев, а затем назначается некоторая уступка, которую можно допустить, для того чтобы решать задачу по другому из критериев. Если предположить, что по степени значимости критерия на первом месте находится максимизация величины получаемой прибыли, затем

минимизация затрат на выпуск продукции, максимизация выпуска продукции и минимизация расходов ресурсов, то в начале, как и было уже сделано ранее необходимо отыскать значение максимальной прибыли. После этого, найденное значение следует уменьшить на 5%.

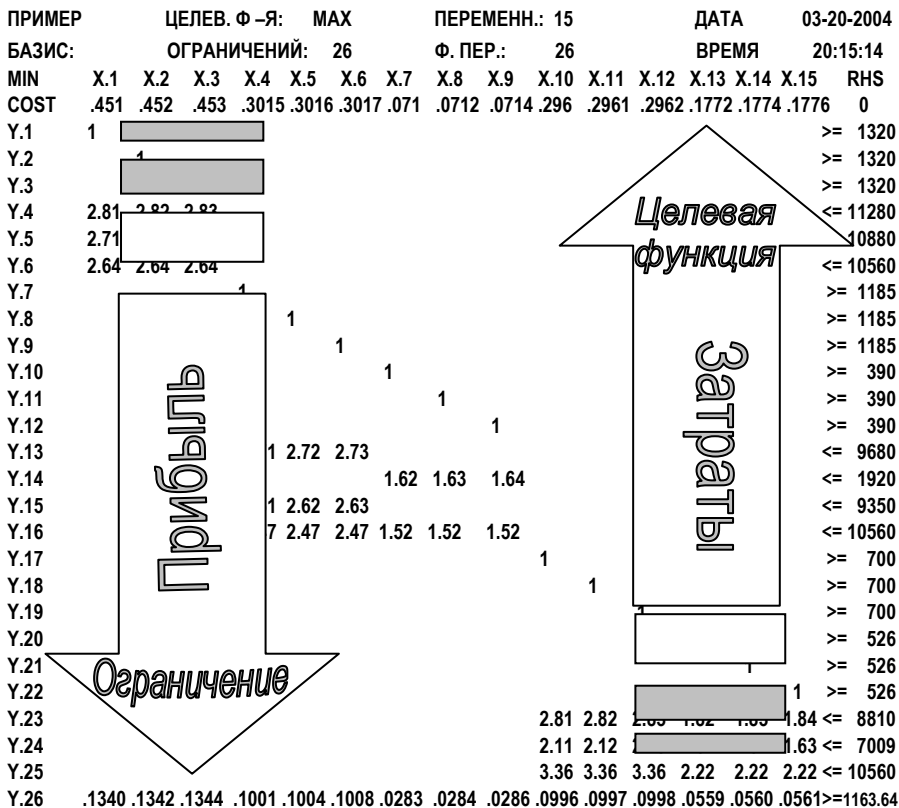


Рис. 12.1. Матрица многокритериальной модели оптимизации ассортимента продукции в формате пакета PLP-2000

Полученное расчетное значение вводится в модель как ограничение правой части матрицы. В рассматриваемом примера ограничение величины прибыли составляет $1224,89 \cdot 0,95 = 1163,65$ тыс. грн. Значе-

§ 12.3. Решение многокритериальной задачи

ние коэффициентов затрат выпуска продукции на рис. 12.1 вводятся как коэффициенты целевой функции. Затем задача решается как однокритериальная на минимум затрат выпуска продукции. Результаты решения задачи приведены на рис. 12.2. Минимизированная величина

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ						ДАТА 03-20-2004	ВРЕМЯ 20:15:14		
MINIMUM	ВВОДИМ:						БАЗИС X: 15	ПЕРЕМЕНН.: 15		
ТОЧЕК : 16	ВЫВОД.:						БАЗИС S: 11	Ф.ПЕР.: 26		
ТОЧ. INV: 0	ОЦЕН. 0						COST 3380.63	ОГРАНИЧЕНИЙ: 26		
BASIS	X.1	S.26	X.3	S.4	S.5	S.6	X.4	X.5	X.6	
X.7	X.8	X.9	S.13	S.14	S.15	S.16	X.10	X.11	X.12	
X.13	X.14	X.15	S.23	S.24	S.25	X.2				
РЕШЕН.	1320	734.5	1320	112.8	108.8	105.6	1185	1185	1185	
390	390	390	10.4	12.9	35.9	.75	700	700	700	
526	526	526	.26	.64	.84	1320				
ОЦЕН	.451	.452	.453	0	0	0	.3015	.3016	.3017	
.071	.0712	.0714	0	0	0	0	.296	.0997	.0998	
.0559	.056	.0561	0	0	0	0				

Рис. 12.2. Решение задачи оптимизации ассортимента выпуска продукции в формате пакета PLP-2000

связанных в выпуском продукции составляет 3380,63 тыс. грн. По сравнению с оптимальным решением, при котором была максимизирована величина полученной прибыли, затраты сократились на $3865 - 3380,63 = 484,37$ тыс. грн.

Для решения многокритериальной задачи на максимум выпускаемой продукции необходимо минимальную величину затрат увеличить на 5 %. Ограничение по затратам при этом составит 3549,66 тыс. грн. Для ограничения затрат на производство продукции необходимо ввести в матрицу модели дополнительную строку Y.27. Коэффициентами целевой функции матрицы модели будут выступать задаваемые коэффициенты выпуска продукции. Матрица модели многокритериальной задачи решаемая на максимум выпуска продукции в модифицированном виде представлена на рис. 12.3. В отличие от матрицы, которая представлена на рис. 12.1 она имеет

на одно ограничение больше. Строка Y.27 является ничем иным, как преобразованной в неравенство целевой функцией задачи минимизации затрат, значение которой ограничено. Коэффициентами целевой

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-Я: MAX					ПЕРЕМЕНН.: 15					ДАТА 03-20-2004					
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ: 27					Ф. ПЕР.: 27					ВРЕМЯ 20:20:14					
MAX	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	X.9	X.10	X.11	X.12	X.13	X.14	X.15	RHS
RETURN	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Y.1	1															>= 1320
Y.2		1														>= 1320
Y.3			1													>= 1320
Y.4	2.81	2.82	2.83													<= 11280
Y.5	2.71	2.72	2.73													<= 10880
Y.6	2.64	2.64	2.64													<= 10560
Y.7				1												>= 1185
Y.8					1											>= 1185
Y.9						1										>= 1185
Y.10							1									>= 390
Y.11								1								>= 390
Y.12									1							>= 390
Y.13				2.71	2.72	2.73										<= 9680
Y.14							1.62	1.63	1.64							<= 1920
Y.15				2.61	2.62	2.63										<= 9350
Y.16				2.47	2.47	2.47	1.52	1.52	1.52							<= 10560
Y.17										1						>= 700
Y.18											1					>= 700
Y.19												1				>= 700
Y.20													1			>= 526
Y.21														1		>= 526
Y.22															1	>= 526
Y.23										2.81	2.82	2.83	1.82	1.83	1.84	<= 8810
Y.24										2.11	2.12	2.13	1.61	1.62	1.63	<= 7009
Y.25										3.36	3.36	3.36	2.22	2.22	2.22	<= 10560
Y.26	.1340	.1342	.1344	.1001	.1004	.1008	.0283	.0284	.0286	.0996	.0997	.0998	.0559	.0560	.0561	>=1163.64
Y.27	.451	.452	.453	.3015	.3016	.3017	.071	.0712	.0714	.296	.2961	.2962	.1772	.1774	.1776	<= 3549.66

Рис. 12.3. Матрица многокритериальной модели оптимизации ассортимента продукции в формате пакета PLP-2000

функции матрицы модели задачи служат коэффициенты выпуска продукции. Решение многокритериальной задачи оптимизации ассортимента выпуска продукции, полученное с помощью метода по-

§ 12.3. Решение многокритериальной задачи

следовательной уступки, приведено на рис.12.4. Результаты расчетов показывают, что при условии получения не менее 1163,44 тыс. грн. прибыли и затратах не превышающих 3549,66 тыс. грн. оптимальным планом пошива одежды предусмотрены следующие объемы выпуска: мужских пальто 96 размера – 1360 шт., 100 размера – 1320 шт., 104 размера – 1320 шт., плащей 96–104 размера – 1185 шт., курток 96–104 размера – 390 шт., костюмов 96–104 размера – 700 шт. и и пиджаков 96–104 размера – 526 шт. Экономия ткани по второму цеху при этом составит: драпа – $0,4 \text{ м}^2$ и полиэфирной ткани – $0,4 \text{ м}^2$. По третьему цеху экономия ткани составит: полиэфирной – $10,4 \text{ м}^2$,

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ				ДАТА 03-20-2004		ВРЕМЯ 20:20:14		
MAXIMUM	ВВОДИМ: S.20				БАЗИС X:		ПЕРЕМЕНН.: 15		
ТОЧЕК: 22	ВЫВОД: S.17				БАЗИС S:		Ф.ПЕР.: 27		
ТОЧ. INV: 0	ОЦЕН. - 352313				RETURN 12403.6		ОГРАНИЧЕНИЙ: 27		
BASIS	X.1	X.2	X.3	S.4	S.5	S.1	X.4	X.5	X.6
X.7	X.8	X.9	S.13	S.14	S.15	S.10	X.10	X.11	X.12
S.27	S.26	X.15	S.20	S.24	S.25	X.14	X.13		
РЕШЕН. 1360	1320	1320	.4	.4	40	1185	1185	1185	
390	390	390	10.4	12.1	35.9	.4934	700	700	700
315.6	61.21	526	.1429	.41	.5229	526	526		
ОЦЕН	0	0	0	0	0	.3788	-.625	-.625	-.625
0	0	0	0	0	0	.6579	-.544	-.5495	-.5549
0	-.0055	-.011	.5495	0	0	0	0		

Рис. 12.4. Решение задачи оптимизации ассортимента выпуска продукции в формате пакета PLP-2000

смесовой – $12,1 \text{ м}^2$ и подкладочной – $35,9 \text{ м}^2$. Для шестого цеха экономия подкладочной ткани составит – $0,41 \text{ м}^2$. Также, будет дополнительно сэкономлено $0,5229$ часа фонда рабочего времени при изготовлении мужских костюмов и пиджаков.

Решение многокритериальных оптимизационных задач дает возможность для получения наилучшего (оптимального) решения, которое удовлетворяет различным, довольно часто не сводимым друг к другу критериям.

Краткое повторение

- ❑ **Модификация матрицы** – преобразование целевой функции матрицы многокритериальной модели задачи в одно из ограничений.
- ❑ **Назначение величены уступки** – в начале находится решение по одному из критериев, а затем уже назначается 5% уступка и задача решается по другому из критериев.

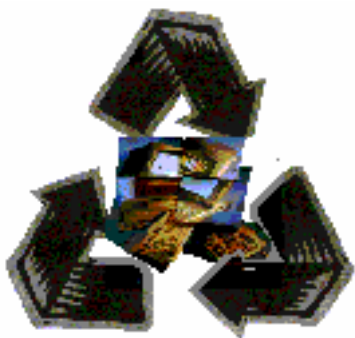
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

абсолютная уступка	относительная уступка
альтернативность вариантов	последовательная уступка
декомпозиция целей	принцип гибкого учета
многокритериальность	принцип жесткого учета
морфологический анализ	принцип квазиравенства
нормализация критериев	принцип максимина
область допустимых решений	принцип равенства
область компромисса	приоритет критериев
область согласия	свобода выбора
оптимальная стратегия	схема компромисса

**Контрольные вопросы
и задания**



1. Многокритериальность решения задач.
2. Альтернативность вариантов выбора.
3. Принципы многокритериальности построения моделей.
4. Множество допустимых решений.
5. Формирование множества критериев.
6. Многокритериальность выбора.
7. Выбор принципа оптимальности.
8. Определение области компромисса.
9. Выбор схемы компромисса.
10. Нормализация критериев оптимальности.
11. Учет приоритета критериев.
12. Решение многокритериальных задач.



Раздел VII

Моделирование оптимального состава и рационального раскроя материалов

☑ Глава 13 *Моделирование оптимального состава*

- § 13.1. Оптимизация состава смесей
- § 13.2. Оптимизация состава сплавов
- § 13.3. Оптимизация состава растворов

☑ Глава 14 *Моделирование рационального раскроя*

- § 14.1. Модель одномерного раскроя
- § 14.2. Модель раскроя листовых материалов
- § 14.3. Модель раскроя рулонных материалов

В этой главе рассмотрены модели оптимизации состава смеси сыпучих материалов, сплава металлов и растворов. Проанализированы результаты полученных решений. Показаны возможность внесения необходимых корректив в ограничения модели, нормативные коэффициенты, целевую функцию, оптимальное решение.

§ 13.1. Оптимизация состава смесей

**Практическая
значимость
задачи**

Одной из наиболее распространенных задач экономико-математического моделирования, которая нашла широкое применение в самых различных отраслях народного хозяйства, является оптимизация состава смесей. В зависимости от целей решаемых задач она может быть использована как для оптимизации состава сыпучих материалов, так и сплавов и растворов. Довольно широкая сфера применения этой задачи в практике моделирования делает возможным ее использование в топливно-энергетической промышленности, черной и цветной металлургии, нефтяной, газовой промышленности, перерабатывающей и пищевой промышленности, а также в сельском хозяйстве.

Оптимизация состава смесей сыпучих материалов позволяет путем комбинирования различных промышленно-производимых, стандартных составов смесей, отличающихся разным содержанием отдельных ингредиентов, получать необходимые смеси сыпучих материалов в требуемом количестве и по наиболее низкой цене.

Наибольшее значение решение этой задачи имеет для предприятий комбикормовой промышленности – основных производителей, высококонцентрированных, сбалансированных кормов для сельскохозяйственных животных.

**Модель
оптимальных
смесей**

Построение модели оптимальных смесей ставит своей целью получение смесей сыпучих материалов с определенным составом ингредиентов, обладающую требуемыми свойствами. Затраты на получение необходимых составов смеси сыпучих материалов из стандартных смесей по возможности должны быть минимальными. Для построения модели задачи оптимальных смесей сыпучих материалов введем следующие необходимые обозначения:

j – вид стандартных смесей, из которых образуется смесь сыпучих материалов необходимого состава;

n – число видов используемых стандартных смесей;

i – ингредиент, входящий в состав стандартной смеси;

m – число ингредиентов, входящих в состав смеси;

W – количество требуемой смеси, которое необходимо получить;

R_i – количество ингредиента i , которое должно быть включено в состав получаемой смеси;

a_{ij} – нормативное количество ингредиента i в единице используемой стандартной смеси j ;

c_j – затраты на приобретение единицы веса стандартной смеси j ;

x_j – искомое количество стандартной смеси j , требуемое для получения смеси необходимого состава.

Математическая модель. Исходя из заданного набора стандартных смесей $j = 1, n$ найти такие значения искомых величин x_j при которых затраты на получение необходимой смеси минимальны

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (13.1)$$

и выполняются условия ограничения количества стандартных смесей

§ 13.1. Оптимизация состава смесей

требуемых для получения смеси необходимого состава, а также

$$\sum_{i=1}^n x_j = W, \quad (13.2)$$

количества включаемых в состав смеси ингредиентов

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \geq R_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (13.3)$$

и условия неотрицательности переменных

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (13.4)$$

Задача оптимизации состава смесей

Требуется получить оптимальный состав смеси цементно-известкового раствора для штукатурки поверхностей стен цехов промышленного предприятия. Для приготовления необходимого количества цементно-известковой смеси требуемого состава используют стандартные составы смесей цемента, извести, песка и синтетических добавок четырех видов. Данные о составе используемых стандартных смесей приведены в табл.13.1.

Таблица 13.1

Состав ингредиентов стандартных смесей

Название смесей	Содержание ингредиентов, кг/т.			
	цемента	извести	песка	добавок
Banner	235,7	165,1	589,4	9,8
Perlfix	206,8	165,4	620,5	7,3
Potband	184,2	165,8	644,9	5,1
Uniors	166,1	166,1	664,2	3,6

Для штукатурки поверхностей стен цехов предприятия потребуется

50 т сухой смеси. Эта смесь должна содержать 11 т цемента, 8,26 т извести, 30,31 т песка и 0,43 т синтетической добавки. Затраты на приобретение одной т стандартной смеси составляют: Banner – 250 грн, Perlfix – 220 грн, Potband – 210 грн, Uniors – 190 грн. Необходимо минимизировать суммарные затраты на приготовление требуемого состава смеси.

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф –Я:	MIN	ПЕРЕМЕНН.: 10	ДАТА	03-20-2004
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ:	5	Ф. ПЕР.:	4	ВРЕМЯ 15:10:14
MIN	X.1	X.2	X.3	X.4	RHS
COST	.25	.22	.21	.19	0
Y.1	1	1	1	1	= 50000
Y.2	.2357	.2068	.1842	.1661	> = 11000
Y.3	.1651	.1654	.1658	.1661	> = 8260
Y.4	.5894	.6205	.6449	.6642	> = 30310
Y.5	.0098	.0073	.0051	.0036	> = 420

Рис. 13.1. Матрица модели оптимизации состава смесей в формате пакета PLP-2000

Матрица модели оптимизации состава смеси сыпучих материалов в формате пакета PLP-2000 представлена на рис. 13.1. Вектор-столбцами матрицы модели являются четыре стандартных набора смесей сыпучих материалов. Ограничениями модели – лимитируемое количество используемых стандартных смесей (Y.1) и величины используемых ингредиентов (Y.2–Y.5). Нормативными коэффициентами, служат коэффициенты содержания ингредиентов в 1 кг стандартной смеси.

§ 13.1. Оптимизация состава смесей

Анализ результатов полученного решения

Результаты решения задачи оптимизации состава смесей сыпучих материалов показали, что для получения 50 т смеси цемента, извести, песка и синтетических добавок для штукатурки поверхностей стен цехов предприятия необходимо взять: сухой стандартной смеси

Perlfix – 27,163 т и смеси Banner – 22,837 т. Затраты на получение

ПРИМЕР РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ДАТА 03-20-2004 ВРЕМЯ 15:10:14

MINIMUM ВВОДИМ : S.5 БАЗИС X : 2 ПЕРЕМЕН. : 4
ИТЕРАЦ : 5 ВЫВОД. : БАЗИС S : 3 Ф. ПЕР. : 4
ТОЧ. INV : 0 ОЦЕН. 12 COST 11685.1 ОГРАНИЧЕНИЙ: 5

BASIS	S.3	S.5	S.4	X.2	X.1
РЕШЕН.	.1488	.0934	.7578	27163	22837
ОЦЕН.	.0057	1.038	0	0	0

Основная
переменная

Искусственная
переменная

Значение искусствен-
ной переменной

Значение основной
переменной

Рис. 13.2. Решение задачи оптимизации состава смесей в формате пакета PLP-2000

смесей (рис.13.2) при этом составят 11685,1 грн. Содержание в смеси цемента составит 11 т. Содержание извести – $(8,26+S.3)$ т и песка – $(30,31+S.4)$ т, незначительно превысит требования к содержанию этих ингредиентов, извести на 0,0018% и песка на 0,0025%. Содержание синтетической добавки – $(0,42+S.5)$ т будет на 2,29% меньше.

В случае необходимости полученное решение может быть откорректировано. Для этого необходимо в ограничении правой части матрицы модели, строго задать необходимое количество синтетической добавки – 0,43 т. После этого задачу необходимо пересчитать заново. В результате будет получено оптимальное решение с минимизируемым значением целевой функции 11780 грн. Расходуемое количество сухих стандартных смеси при этом изменится: Perlfix – уменьшится на 3,163 т, а Banner – увеличится на 3,163 т. Содержание

в смеси необходимых ингредиентов, при этом также увеличится. Цемента – на 91,4 кг, извести – на 2,2 кг и песка – на 16,4 кг.

Краткое повторение

- ❑ **Оптимизация состава смеси** – расчет состава смеси содержащей необходимый набор ингредиентов, затраты на получение которой, должны быть минимальны.
- ❑ **Корректирование оптимального решения** – внесение необходимых изменений в ограничения модели, коэффициенты целевой функции и нормативные коэффициенты.

§ 13.2. Оптимизация состава сплавов

Модель оптимизации состава сплава

На металлургическом комбинате производится чугуна. Для выплавки чугуна используются различного вида шихтовые материалы. При этом в состав шихты входят: железосодержащие материалы (руда, колошниковая пыль); известняк или доломитированный известняк; возврат (мелкий агломерат); твердое топливо. Содержание отдельных ингредиентов в составе шихты может варьировать в некоторых пределах. Дозирование шихты должно обеспечить стабильность процесса и надлежащее качество агломерата, в том числе его однородность. Требуется

§ 13.2. Оптимизация состава сплавов

установить оптимальный выбор шихтового материала, чтобы получить чугун как можно меньшими затратами. Для построения экономико-математической модели задачи введем следующие обозначения:

- j – вид шихтового материала, из которого получают чугун;
- m – число видов шихтового материала, которое необходимо для получения чугуна;
- i – вид компонента (железосодержащие материалы, известняк, возврат и т. п.), который должен быть в шихте;
- n – число видов компонент;
- R_i – количество компонента i , которое должно быть в шихте;
- a_{ij} – содержание компонента i в единице шихтового материала j ;
- a_j – количество шихтового материала j , необходимого для производства чугуна;
- b_j – количество шихтового материала j , который может использоваться для производства чугуна;
- x_j – количество шихтового материала j , необходимого для производства чугуна;
- c_j – стоимость единицы шихтового материала j .

Математическая модель. Используя имеющиеся на предприятии запасы шихтового материала, количество которых ограничено, определить оптимальные значения x_j

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq R_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (13.5)$$

позволяющие минимизировать затраты

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (13.6)$$

при условии

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (13.7)$$

Используя модель, можно определить оптимальный набор шихтовых материалов, при котором затраты на производство чугуна в целом будут наименьшими.

**Задача
оптимизации
состава сплава**

Для выплавки чугуна в металлургическом производстве используются шихтовые материалы, содержание отдельных ингредиентов которых, может варьировать в определенных пределах. Железосодержащие материалы (руда, колошниковая пыль), которые входят в состав шихты могут изменяться в пределах от 40–50%. Известняк или доломитированный известняк в составе шихты может быть в пределах 15–20 %. Содержание возврата (мелкого агломерата) в шихте лежит в пределах 20–30 %. Твердое топливо составляет от 4–6 %. Содержание влаги варьирует в пределах 6–9 %. В соответствии с этим, варьирует и цена на шихтовые материалы. Для выплавки чугуна с заданными свойствами

Таблица 13.2
Состав шихтовых материалов разных видов

Основные ингредиенты шихты	Содержание ингредиентов кг/т			
	АШТ-40	АШТ-43	АШТ-47	АШТ-50
Железосодержащие материалы	400	430	470	500
Известняк	200	180	160	150
Возврат	300	270	240	200
Твердое топливо	40	50	50	60
Влага	60	70	80	90

используется шихта которая включает: железосодержащих материалов – 45,44 %; известняка – 17,01 %; возврата – 25,92 %; твердого топлива – 4,81 %; влаги – 7,36 %. На металлургическом комбинате, шихту необходимого состава получают путем смешивания

§ 13.2. Оптимизация состава сплавов

четырёх видов шихты, состав ингредиентов которых приведен в табл. 13.2. Для получения необходимого количества шихты требуемого состава будет использовано: шихты АШТ- 40 180 – 190 т; шихты АШТ- 43 50 – 260 т; шихты АШТ- 47 270 – 280 т; шихты АШТ- 50 270 – 300 т. Цена одной т шихты марки АШТ- 40 составляет 121,1 грн, АШТ- 43 – 129,9 грн, АШТ- 47 – 136,5 грн, АШТ- 50 – 143,4 грн. Необходимо с учетом требований к составу ингредиентов получить 999,4 тонн шихты с минимальными затратами.

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф –Я: MIN				ПЕРЕМЕНН.: 10	ДАТА	03-27-2004
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ: 15				Ф. ПЕР.: 13	ВРЕМЯ	15:10:14
MIN	X.1	X.2	X.3	X.4			RHS
COST	121.1	129.9	136.5	143.4			0
Y.1	1						< = 190
Y.2		1					< = 260
Y.3			1				< = 280
Y.4				1			< = 300
Y.5	.4	.43	.47	.5			> = 454
Y.6	.2	.18	.16	.15			> = 170
Y.7	.3	.27	.24	.24			> = 259
Y.8	.04	.05	.05	.05			> = 48
Y.9	.06	.07	.08	.08			> = 73
Y.10	1						> = 180
Y.11		1					> = 250
Y.12			1				> = 270
Y.13				1			> = 270

Рис. 13.3. Матрица модели оптимизации состава сплава в формате пакета PLP-2000

Матрица модели оптимизации состава сплава в формате пакета PLP-2000 представлена на рис. 13.3. Вектор-столбцами матрицы модели выступают четыре вида шихты. Переменные X.1 – X.4 определяют расчетное значение количества смешиваемых марок шихты. Ограничениями модели служат: верхние границы использования

шихты четырех марок **Y.1 – Y.4**, ограничения требований по содержанию в шихте необходимых ингредиентов: железосодержащих материалов – 454 т, извести – 170 т, возврата – 259 т, твердого топлива – 48 т, влаги – 73 т (**Y.5 – Y.9**), а также ограничений нижней границы использования шихты четырех видов **Y.10 – Y.13**. Коэффициентами целевой функции являются минимизируемые значения затрат на приобретение 1 т шихты.

**Анализ
результатов
расчетов**

Результаты решения задачи оптимизации состава сплава показали, что для получения 999,4 т шихты требуемого состава, для выплавки чугуна с необходимыми свойствами нужно будет взять 190 т шихты АШТ-40, 260 т шихты АШТ-43, 279,4 т шихты АШТ-47, 270 т шихты АШТ-50 (**X.1 – X.4**). При этом значения переменных (**X.1 – X.3**) целиком соответствуют верхним границам ограничений, а переменной **X.4** – нижней границе ограни-

ПРИМЕР	РАСЧЕТНОЕ КОЛИЧЕСТВО ШИХТЫ АШТ-47				ВЕЛИЧИНА МИНИМИЗИРУЕМЫХ ЗАТРАТ НА ШИХТУ				
МИНИМУМ	ЗНАЧЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ				ДАТА	2004	ВРЕМЯ	15:10:14	
ИТЕРАЦ :	ВВОДИМ : S.12				БАЗИС X :			ПЕРЕМЕН. :	4
ТОЧ. INV :	ВЫВОД. : S.13				БАЗИС S :	9		Ф. ПЕР. :	13
	ОЦЕН. -16.46				COST	133636		ОГРАНИЧЕНИЙ:	13
BASIS	S.4	S.11	S.3	S.8	S.9	S.7	S.10	S.5	S.12
X.1	X.2	X.3	X.4						
РЕШЕН.	30	10	.625	.0688	.55	.05	10	.1063	9.375
	190	260	279.4	270					
ОЦЕН.	-49.53	-23.66	0	0	0	853.1	0	0	0
	0	0	0	15.43					

Рис. 13.4. Решение задачи оптимизации состава сплава в формате пакета PLP-2000

чений (рис. 13.4). Величина минимизируемых затрат на шихту при выплавке чугуна составит 133636 грн. Анализ значений искусственных переменных показывает, что отклонение от расчетных величин

§ 13.3. Оптимизация состава растворов

полученного оптимального решения для железосодержащих материалов составляет $454 + S.5 = 454,1063$ т или 0,02 %. Для возврата (мелкого агломерата) отклонение от расчетной величины, составляет $259 + S.7 = 259,05$ тонн или 0,02%. Отклонение расчетных величин для твердого топлива составили $48 + S.8 = 48,0688$ т или 0,14 %, для влаги – $73 + S.9 = 73,55$ т или 0,75 %.

Краткое повторение

- **Шихта** – смесь сыпучих материалов в определенных пропорциях, предназначенная для выплавки чугуна в доменном производстве.
- **Оптимизация состава смеси** – расчет состава смесей сыпучих материалов, который содержит необходимый набор ингредиентов для выплавки чугуна, необходимых свойств с минимальными затратами.

§ 13.3. Оптимизация состава растворов

Модель оптимизации состава растворов

Еще одним распространенным типом задач линейного программирования является получения оптимального состава растворов, на пример задача составления таких смесей нефтепродуктов, которые удовлетворяют определенным требованиям и оказываются наиболее дешевыми.

Бензин разных сортов получают путем смешивания нефтепродуктов, имеющих различные технические характеристики.

Заданные показатели качества бензина (октановое число, степень очистки и др.) должны выдерживаться весьма точно, так как для потребителя они играют важную роль. От того, какие нефтепродукты при этом смешиваются, зависит величина получаемой прибыли. Требуется определить такой состав смеси нефтепродуктов, который обеспечил бы максимальную прибыль и позволил получить бензин заданных сортов и в нужных пропорциях. Для построения экономико-математической модели задачи введем следующие необходимые ограничения:

- j – вид нефтепродукта, из которого образуется смесь;
- n – число видов нефтепродуктов;
- i – вид свойства, которым должна обладать смесь;
- m – число всех видов свойств;
- a_{ij} – содержание вида свойства i в единице нефтепродукта j ;
- c_j – прибыль от реализации единицы нефтепродукта j ;
- W_j – объем поставок нефтепродукта j ;
- Q_i – потребность в нефтепродуктах со свойствами i ;
- x_j – искомое количество нефтепродукта j , которое необходимо для получения смеси.

Математическая модель. Определить оптимальные значения используемых для приготовления смесей нефтепродуктов x_j , позволяющие с учетом ограниченности поставок

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq W_j, \quad (13.8)$$

и потребности в отдельных нефтепродуктах

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_j \geq Q_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (13.9)$$

максимизировать величину получаемой прибыли

§ 13.3. Оптимизация состава растворов

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (13.10)$$

и условия неотрицательности переменных

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (13.11)$$

Задача оптимизации состава бензина

Пробы бензина, поступившего на базу хранения горюче-смазочных материалов, показали отклонение от нормативных показателей октанового числа, содержания “тетраэтил свинца”, фактических смол и серы в трех последних партиях бензина марок АИ-93 и АИ-98. В соответствии с требованиями показатель октанового числа бензина марки АИ-93 должен составлять не менее 85 единиц, содержание тетраэтилсвинца 0,82 г/на 1 кг, фактических смол – 7 мг на 100 мл и серы – 0,10 %.

Таблица 13.3

Содержание состава бензина поставляемых партий

Показатель	Бензин АИ-93			Бензин АИ-98		
	Партия 1	Партия 2	Партия 3	Партия 1	Партия 2	Партия 3
Октановое число	84,4	84,8	85,9	88,5	88,8	89,3
Тetraэтил свинец г/кг	0,812	0,814	0,825	0,812	0,815	0,824
Содержание смол мг/100 мл	7	7	7	7	7	7
Содержание серы %	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10

Для бензина марки АИ-98 показатель октанового числа должен составлять 89 ед., тетраэтилсвинца – 0,82 г на 1 кг, фактических смол – 7 мг на 100 мл и серы – 0,10 %. При исправлении бензина по

показателям, которые приведены в табл. 13.3, горючее одной партии, подлежащее исправлению, необходимо смешать с горючим других партий, той же марки, но имеющей запас качества по исправляемому показателю. Для исправления 120 т бензина марки АИ-93 планируется использовать 20 т бензина партии 1, 50 т бензина партии 2 и 70 т

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф –Я: МАХ								ПЕРЕМЕНН.: 10	ДАТА	03-29-2004
БАЗИС: NONE	ОГРАНИЧЕНИЙ: 18								Ф. ПЕР.: 15	ВРЕМЯ	15:10:14
МАХ	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8		RHS	
RETURN	810	820	830	860	870	880				0	
Y.1	1									< = 20	
Y.2		1								< = 50	
Y.3			1							< = 70	
Y.4				1						< = 10	
Y.5					1					> = 40	
Y.6						1				> = 70	
Y.7	844	848	853							> = 102000	
Y.8	812	814	825							> = 98400	
Y.9	70	70	70							> = 8400	
Y.10	10	10	10							> = 1200	
Y.11				885	888	893				> = 89000	
Y.12				812	815	824				> = 82000	
Y.13				70	70	70				> = 7000	
Y.14				10	10	10				> = 1000	
Y.15	1	1	1					-1		= 0	
Y.16				1	1	1			-1	= 0	
Y.17							1			< = 120	
Y.18								1		< = 100	

Рис. 13.5. Матрица модели оптимизации состава раствора в формате пакета PLP-2000

бензина партии 3. Для исправления 100 т бензина марки АИ-98 планируется использовать 10 т бензина партии 1, 40 т бензина партии 2 и 70 т бензина партии 3. Прибыль от реализации 1 т исправленного бензина марки АИ-93 партии 1 при этом составит 810 грн., партии 2 – 820 грн.,

§ 13.3. Оптимизация состава растворов

партии 3 – 830 грн. Прибыль от реализации 1 т исправленного бензина марки АИ-98 партии 1 при этом, составит 860 грн., партии 2 – 870 грн., партии 3 – 880 грн. Следует определить, какое количество бензина из поставленных партий необходимо смешать, чтобы получить бензин в необходимом количестве и требуемого качества. Прибыль от реализации этого бензина должна быть максимальной.

Матрица экономико-математической модели задачи оптимизации состава бензина представлена на рис. 13.5. Она состоит из восьми

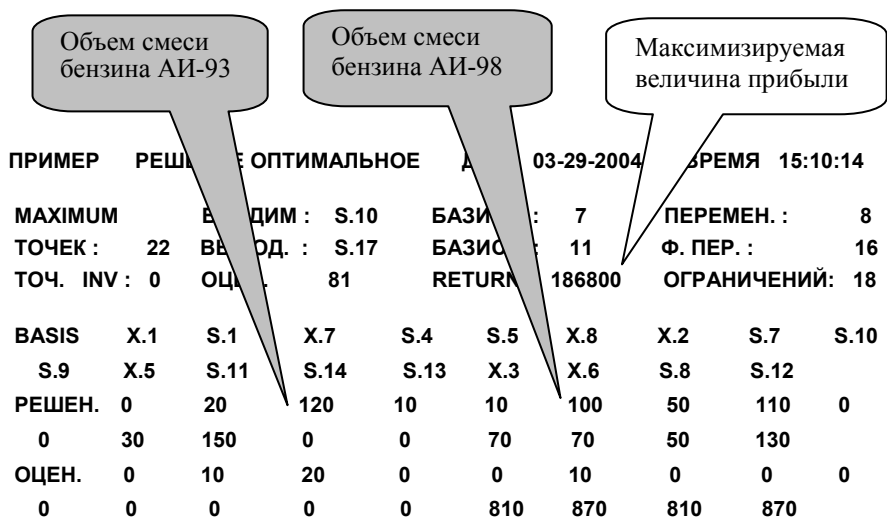


Рис. 13.6. Решение задачи оптимизации состава раствора в формате пакета PLP-2000

вектор-столбцов и включает в себя четырнадцать ограничений. Переменные **X.1 – X.3** матрицы модели показывают расчетное количество бензина партии 1 – 3 марки АИ-93, которое необходимо смешать. Переменные **X.4 – X.6**, показывают расчетное количество бензина партии 1 – 3 марки АИ-98. Неравенствами модели **Y.1 – Y.3** являются ограничения объемов поставок бензина марки АИ-93 партий 1 – 3. Неравенствами **Y.4 – Y.5**, являются ограничения объемов поставок

бензина марки АИ-98 партий 1–3. Для выполнения необходимых требований к получаемым смесям бензина марок АИ-93 и АИ-98 в модель введены ограничения по показателям октанового числа, содержанию тетраэтилсвинца, фактических смол и серы **У.7 – У.9** и **У.11 – У.14**. Ограничениями **У.15 – У.18** лимитируется количество получаемого бензина марок АИ-93 и АИ-98. Отраженные переменные **Х.7** и **Х.8** показывают суммарный объем смесей бензина марки АИ-93 и АИ-98 партий 1–3.

**Анализ
результатов
решения задачи**

Результаты решения задачи оптимизации состава бензина представлены на рис. 13.6. Расчеты показывают, что продажа 120 т Бензина марки АИ-93 и 100 т бензина марки АИ-98 может дать общую суммарную прибыль (RETURN) в размере 186800 грн. Для получения 120 т смеси бензина марки АИ-93 необходимо взять: 50 т бензина партии 2 и 70 т бензина партии 3. Для получения 100 т смеси бензина марки АИ-98 необходимо взять: 30 т бензина партии 2 и 70 т бензина партии 3.

ПРИМЕР РЕШЕНИЕ ... MAXIMUM			RETURN 186800	ДАТА 03-29-2004	
ОБЛАСТЬ ЗН. ЦЕЛ.Ф-ЦИИ				ВРЕМЯ 15:10:14	
ПЕРЕМЕН.	СТАТУС	ЗНАЧ.	RETURN/UNIT	MINIMUM	MAXIMUM
X.1	BASIS	0	810	0	820
X.2	BASIS	50	820	810	NONE
X.3	BASIS	70	830	810	NONE
X.4	NONBASIS	0	860	NONE	870
X.5	BASIS	30	870	860	880
X.6	BASIS	70	880	870	NONE
X.7	BASIS	120	0	-810	NONE
X.8	BASIS	100	0	-870	NONE

Рис. 13.7. Решение двойственной задачи оптимизации состава раствора в формате пакета PLP-2000

Анализ значения дополнительных переменных показывает, что при получении смеси бензина марки АИ-93 останется неиспользованным 20 т бензина партии 1 (**S.1**). При получении смеси бензина марки

§ 13.3. Оптимизация состава растворов

АИ-98 останется не использованным 10 т бензина партии 1 (S.4) и 10 т бензина партии №2 (S.5). Дополнительная переменная (S.7) показывает, что октановое число в смеси бензина марки АИ-93 будет превышено на 0,12 %. Значение переменной (S.8) говорит о том, что содержание тетраэтилвинца в полученной смеси бензина марки АИ-93 будет превышено на 0,05 %. Переменная (S.11) показывает, что октановое число в смеси бензина марки АИ-98 будет больше на 0,18 %. Величина переменной (S.12) говорит о том, что содержание тетраэтилсвинца в смеси бензина марки АИ-98 будет больше на 0,16 %.

Исследование двойственных оценок области изменения коэффициентов целевой функции (рис. 13.7) показало, что прибыль получаемая от реализации 1 т бензина марки АИ-93 партии 2 и 3 при необходимости может быть снижена до 810 грн. Верхняя граница прибыли для бензина марки АИ-93 партии №2 и №3 не установлена. Для бензина марки АИ-98 партии 2 нижняя граница прибыли может быть снижена до 860 грн. Для этого же бензина партии 3 нижняя граница прибыли может быть снижена до 870 грн. Верхняя граница прибыли для бензина марки АИ-93 партии 2 установлена в размере 880 грн. Для бензина этой марки партии 3, верхняя граница прибыли не установлена.

Краткое повторение

- ❑ **Раствор** – однородная смесь жидкостей состоящих из отдельных ингредиентов, составленных в определенной пропорции.
- ❑ **Оптимизация состава раствора** – расчет состава смеси жидкостей содержащий требуемый набор ингредиентов, который необходим для получения раствора.
- ❑ **Исправление бензина** – смешивание горючего других партий, той же марки, но имеющих запас качества по исправленному показателю.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

корректирование оптимального решения
оптимизация состава смеси
оптимизация состава сплава

оптимизация состава раствора
раствор
шихта

***Контрольные вопросы
и задания***



1. Оптимизация состава смесей.
2. Практическая значимость оптимизации смесей.
3. Модель оптимальных смесей.
4. Задача оптимизации состава смесей.
5. Анализ решения задачи оптимизации состава смесей.
6. Оптимизация состава сплавов.
7. Задача оптимизации состава сплавов.
8. Анализ решения задачи оптимизации состава сплавов.
9. Оптимизация состава растворов.
10. Задача оптимизации состава растворов.
11. Анализ решения задачи оптимизации растворов.
12. Решите задачи оптимизации смесей на компьютере.

В этой главе представлены модели рационального раскроя. Рассмотрен одномерный раскрой линейных форм, раскрой листовых и рулонных материалов. Показаны особенности вторичного раскроя и комплектного выхода деталей. Рассмотрены возможности минимизации отходов, получения межлекарных выпадов и концевых остатков.

§ 14.1. Модель одномерного раскроя

Модель одномерного раскроя

На многих промышленных предприятиях при массовом производстве продукции необходимо добиться рационального раскроя линейных форм (трубы, профиль, уголки, прутки, арматура, доски) с наименьшим количеством получаемых отходов. План раскроя считается оптимальным, если он обеспечивает необходимый выход заготовок при раскрое их на заданное количество штук определенных размеров при минимальных отходах. Для формализации экономико-математической модели задачи в наиболее общем виде введем следующие обозначения:

i – вид заготовки;

m – число всех видов заготовок;

j – вариант раскроя заготовок;

n – число всех вариантов раскроя;

a_{ij} – количество заготовок вида i , которое можно получить при раскрое по варианту j ;

b_i – количество заготовок вида i , которое следует получить;
 p – количество профиля;
 c_j – отходы материала, получаемые при раскросе по варианту j ;
 x_j – количество раскраиваемых линейных форм по варианту j , необходимое для получения заданного количества заготовок.

Математическая модель состоит из целевой функции минимизирующей количество получаемых отходов, при различных вариантах раскроя

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (14.1)$$

при следующих условиях:

ограничении количества заготовок, которое необходимо получить

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, l}; \quad (14.2)$$

ограничении количества профиля

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq p; \quad (14.3)$$

и условия неотрицательности переменных

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (14.4)$$

**Задача
одномерного
раскроя**

Предприятие по производству металлопластиковых окон получило заказ на изготовление окон из пластика. Для производства окон используется профиль $l = 600$ см. Из этого профиля необходимо выкроить четыре вида заготовок: $d_1 = 210$ см; $d_2 = 130$ см; $d_3 = 65$ см; $d_4 = 35$ см в количестве $b_1 = 200$ шт.; $b_2 = 200$ шт.; $b_3 = 600$ шт.; $b_4 = 200$ шт. При изготовлении такого количества заготовок планируется использовать 220 единиц профиля.

§ 14.1. Модель одномерного раскроя

Таблица 14.1

Варианты раскроя профиля на заготовки

Варианты раскроя	Выход заготовок				Количество отходов
	$d_1 = 210$	$d_2 = 130$	$d_3 = 65$	$d_4 = 35$	
1	2	1		1	15
2	2		2	1	15
3	2		1	3	10
4	2			5	5
5		3	1	1	10
6		3		3	5
7		2	5		15
8		2	4	2	10
9		2	3	4	5
10		2	2	6	
11		2	1	7	30
12		2		9	25
13		1	7		15
14		1	6	2	10
15		1	5	4	5
16		1	4	6	
17		1	3	7	30
18		1	2	9	25
19		1	1	11	20
20		1		13	15
21			9		15
22			8	2	10
23			7	4	5
24			6	6	
25			5	7	30
26			4	9	25
27			3	11	20
28			2	13	15
29			1	15	10
30				17	5

Для построения матрицы экономико-математической модели задачи необходимо определить возможные варианты раскроя профиля на отдельные заготовки. При этом очень важно не упустить

ни одного из вариантов. Все возможные варианты раскроя профиля на заготовки представлены в табл. 14.1. В левой крайней графе таблицы приведен номер варианта раскроя. В графах с права от нее,

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-Я: MIN																ПЕРЕМЕНН.: 30	ДАТА	04-07-2004
БАЗИС: NONE	ОГРАНИЧЕНИЙ: 15																Ф. ПЕР.: 1	ВРЕМЯ	17:27:50
MIN	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	X.9	X.10	X.11	X.12	X.13	X.14	X.15	X.16	X.17	RHS	
COST	15	15	10	5	10	5	15	10	5	0	30	25	15	10	5		30	0	
Y.1	1	1	3	5	1	3		2	4	6	7	9		2	4	6	7	= 200	
Y.2		2	1		1		5	4	3	2	1		7	6	5	4	3	= 200	
Y.3	1				3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	= 600	
Y.4	2	2	2	2														= 200	
Y.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<= 220	

Рис. 14.1. Фрагмент матрицы модели одномерного раскроя в формате пакета PLP-2000

дан выход заготовок по размерам и количество получаемых отходов. Матрицы модели содержит тридцать вариантов раскроя (X.1 – X.30) и включает пять ограничений (Y.1 – Y.5). Коэффициентами целевой

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ					ДАТА	04-07-2004	ВРЕМЯ	17:27:50	
MINIMUM	ВВОДИМ : X.24					БАЗИС X :	4	ПЕРЕМЕН. :	30	
ТОЧЕК :	5	ВЫВОД. : X.30					БАЗИС S :	1	Ф. ПЕР. :	1
ТОЧ. INV :	0	ОЦЕН. -11.7647					COST	2666.67	ОГРАНИЧЕНИЙ:	5
BASIS	X.1	X.5	X.21	X.24	S.5					
РЕШЕН.	100	33.33	55.56	11.11	20					
ОЦЕН.	6.667	3.333	1.667	-1.667	0					

Рис. 14.2. Решение задачи одномерного раскроя в формате пакета PLP-2000

функции служит количество получаемых отходов. Фрагмент матрицы модели одномерного раскроя в формате пакета PLP-2000 представлен на рис. 14.1. Этот фрагмент содержит часть матрицы модели – семнад-

§ 14.1. Модель одномерного раскроя

цать вариантов раскроя из тридцати и ограничения правой части матрицы. Коэффициентами целевой функции является количество получаемых при раскрое отходов.

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф –Я: MIN															ПЕРЕМЕНН.: 36	ДАТА	04-09-2004
БАЗИС: NONE	ОГРАНИЧЕНИЙ: 15															Ф. ПЕР.: 1	ВРЕМЯ	17:30:50
MIN	X.20	X.21	X.22	X.23	X.24	X.25	X.26	X.27	X.28	X.29	X.30	X.31	X.32	X.33	X.34	X.35	X.36	RHS
COST	15	15	10	5		30	25	20	15	10	5	15	15			25	30	0
Y.1	13		2	4	6	7	9	11	13	15	17			6		3	1	= 200
Y.2		9	8	7	6	5	4	3	2	1		1	3		2		-1	= 600
Y.3	1												1		-1	-1		= 200
Y.4													-1	-1	-1			= 200
Y.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							<= 220

Рис. 14.3. Фрагмент расширенной матрицы модели одномерного раскроя в формате пакета PLP-2000

Результаты расчетов (рис. 14.2) показали, что для получения необходимого количества заготовок потребуется $220 - S.5 = 200$ ед. профиля. Количество отходов, которое минимизируется (COST),

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ					ДАТА	04-09-2004	ВРЕМЯ	17:30:50	
MINIMUM	ВВОДИМ : X.24					БАЗИС X :	4	ПЕРЕМЕН. :	30	
ТОЧЕК :	5	ВЫВОД. : X.30					БАЗИС S :	1	Ф. ПЕР. :	1
ТОЧ. INV :	0	ОЦЕН. -11.7647					COST	2666.67	ОГРАНИЧЕНИЙ:	5
BASIS	X.24	X.21	X.5	X.1	S.5					
РЕШЕН.	11.11	55.56	33.33	100	100					
ОЦЕН.	-1.667	1.667	3.333	6.667	0					

Рис. 14.4. Решение модифицированной задачи одномерного раскроя в формате пакета PLP-2000

при этом составит 26,67 м, что соответствует 2,22 % всего используемого при раскрое профиля.

Одной из специфических особенностей решения задач оптими-

зации раскроя является возможность вторичного раскроя, когда из заготовок большего размера, которые в избытке, выкраиваются заготовки меньшего размера. Такого рода подход в решении задачи, может быть достигнут, за счет введения в модель дополнительных вариантов получения деталей меньшего размера. Один из фрагментов расширенной матрицы модели содержащий дополнительные вектор-столбцы вариантов раскроя представлен на рис. 14.3. Расширенная матрица модели имеет размерность, которая на шесть переменных (X.31 – X.36) больше, чем матрица предыдущей задачи. Анализ результатов показывает, что решение модифицированной задачи одномерного раскроя (рис. 14.4.), полностью идентичен ранее полученному решению (рис. 14.2.). Это говорит о том, что построенная модель задачи, является *моделью оптимальной сложности* и всякое увеличение размерности модели за счет введения дополнительных переменных и задания ряда ограничений не может существенно повлиять на точность полученных результатов. Дальнейшее повышение сложности модели в целях получения более точных результатов, при этом теряет всякий смысл.

Краткое повторение

- **Одномерный раскрой** – раскрой линейных форм (труб, профиля, уголков, прутков, арматуры, досок) с наименьшим количеством получаемых отходов.
- **Вторичный раскрой** – одна из специфических особенностей задач раскроя, когда из заготовок большего размера, которые получены в избытке, выкраиваются заготовки меньшего размера.
- **Модель оптимальной сложности** – модель, всякое дальнейшее увеличение размерности которой, за счет введения дополнительных переменных и задания ряда ограничений не может существенно повлиять на точность полученных результатов.

§ 14.2. Модель раскроя листовых материалов

Модель раскроя листовых материалов

Раскрой листовых материалов в промышленном производстве предусматривает поиск наиболее эффективных вариантов раскроя листов метала, резины, пластмассы, стекла, картона заданных размеров. При этом предполагается получить оптимальный раскрой листовых материалов, обеспечивающих выпуск максимального числа комплектов деталей разных размеров с наименьшими отходами. Для построения экономико-математической модели задачи оптимального раскроя листовых материалов введем следующие обозначения:

s – номер партии листового материала;

S – число всех видов листовых материалов;

i – вид заготовки;

l_i – число заготовок вида i , необходимых для одного комплекта;

n – число всех видов заготовок;

a_s – количество листового материала одного размера в партии s ;

j – номер варианта раскроя;

n_s – число вариантов раскроя для каждой единицы листового материала вида s ;

a_{sji} – число заготовок вида i , полученных при раскрое единицы листового материала s , в соответствии с вариантом j ;

x_{sj} – искомое количество единиц листового материала s , раскраиваемого в соответствии с вариантом j .

Тогда при раскрое всех партий будет получено заготовок

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj} \text{ и может быть собрано комплектов } \frac{1}{l_i} \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj}.$$

Так как, число составляемых комплектов заготовок лимитировано количеством дефицитных заготовок, то число полных комплектов n

$$n = \min_i \frac{1}{l_i} \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj}. \quad (14.5)$$

План x_{sj} состоит в максимизации числа комплектов

$$\max_x \min_i \frac{1}{l_i} \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj}, \quad (14.6)$$

при условии выполнения плана заготовок

$$\sum_{j=1}^{n_s} x_{sj} = a_s, \quad s = \overline{1, S}; \quad (14.7)$$

и неотрицательности комплектов

$$x_{sj} \geq 0; \quad s = \overline{1, S}; \quad j = \overline{1, n_s}. \quad (14.8)$$

Если через z обозначить число комплектов, то сформированная модель сводится к следующей задаче линейного программирования $z \rightarrow \max$ при ограничениях по количеству получаемых комплектов:

$$\frac{1}{l_i} \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj} \geq z, \quad s = \overline{1, S}; \quad (14.9)$$

условия выполнения плана заготовок

$$\sum_{j=1}^{n_s} x_{sj} = a_s, \quad s = \overline{1, S}; \quad (14.10)$$

и неотрицательности комплектов

$$z \geq 0; \quad x_{sj} \geq 0; \quad s = \overline{1, S}; \quad j = \overline{1, n_s}. \quad (14.11)$$

§ 14.2. Модель раскроя листовых материалов

Задача раскроя листовых материалов

Для раскроя деталей фюзеляжей самолетов, на авиационном заводе используют три вида листов сплава алюминия разных размеров: $R_1 = 4 \cdot 1,5$ м; $R_2 = 4 \cdot 2$ м; $R_3 = 6 \cdot 2$ м. Эти листы на складе завода имеются в следующем количестве: $b_1 = 200$ шт.; $b_2 = 100$ шт.; $b_3 = 50$ шт. Из листов сплава алюминия надо выкроить комплекты заготовок. Комплект состоит из заготовки размером $r_1 = 2 \cdot 1$ м и четырех заготовок $r_2 = 1 \cdot 0,5$ м. Листы нужно раскроить таким образом, чтобы получить максимальное количество комплектов заготовок.

Таблица 14.2

Варианты раскроя листовых материалов

Вариант раскроя	Размер листовых материалов	Размер заготовок	
		$r_1 = (2 \cdot 1)$ м	$r_2 = (1 \cdot 0,5)$ м
1	$R_1 = (4 \cdot 1,5)$ м	2	4
2		1	8
3			12
4	$R_2 = (4 \cdot 2)$ м	4	
5		3	4
6		2	8
7		1	12
8			16
9	$R_3 = (6 \cdot 2)$ м	6	
10		5	4
11		4	8
12		3	12
13		2	16
14		1	20
15			24

Варианты раскроя листовых материалов сплава алюминия приведены в табл. 14.2. Пусть x_1, x_2, x_3 – число листов сплава алюминия размер $R_1 = 4 \cdot 1,5$ м, которые надо раскроить соответ-

Глава 14 МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНОГО РАСКРОЯ

ственно по первому, второму и третьему вариантам; x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 – число листов сплава алюминия размером $R_2 = 4 \cdot 2$ м, которые надо раскроить соответственно по четвертому – восьмому вариантам;

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-Я: MAX															ПЕРЕМЕНН.: 16	ДАТА	04-12-2004
БАЗИС: NONE	ОГРАНИЧЕНИЙ: 15															Ф. ПЕР.: 0	ВРЕМЯ	21:27:14
MAX	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	X.9	X.10	X.11	X.12	X.13	X.14	X.15	Z	RHS	
RETURN																	1 0	
Y.1	1	1	1														= 200	
Y.2				1	1	1	1	1									= 100	
Y.3									1	1	1	1	1	1	1		= 50	
Y.4	2	1		4	3	2	1		6	5	4	3	2	1		-1	= 0	
Y.5	1	2	3		1	2	3	4		1	2	3	4	5	6	-1	= 0	

Рис. 14.5. Матрица модели раскроя листовых материалов в формате пакета PLP-2000

$x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$ – число листов сплава алюминия размером $R_3 = 6 \cdot 2$ м, которые надо раскроить соответственно по

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ					ДАТА	04-12-2004	ВРЕМЯ	21:16:39	
MAXIMUM	ВВОДИМ: X.15					БАЗИС X:	5	ПЕРЕМЕН.:	16	
ТОЧЕК:	6	ВЫВОД.:					БАЗИС S:	0	Ф. ПЕР.:	0
ТОЧ. INV:	0	ОЦЕН. 6					RETURN	650	ОГРАНИЧЕНИЙ:	5
BASIS	X.4	X.15	Z	X.9	X.3					
РЕШЕН.	100	8.333	650	41.67	200					
ОЦЕН.	1.5	2	3	-5	-5					

Рис. 14.6. Решение задачи раскроя листовых материалов в формате пакета PLP-2000

десятому – пятнадцатому варианту; z – число комплектов.

§ 14.2. Модель раскроя листовых материалов

Матрица экономико-математической модели задачи раскроя листовых материалов представлена на рис. 14.5. Ограничения $Y.1 - Y.3$ показывают, что количество используемых листов сплава алюминия должно соответствовать имеющимся у завода запасам листовых материалов. Ограничения матрицы модели $Y.4, Y.5$ показывают, что количество получаемых заготовок должно составлять полный комплект. Учитывая, что заготовок размером $r_2 = 0,5 \cdot 1$ м должно быть в четыре раза больше, чем заготовок размером $r_1 = 1 \cdot 2$ м, то коэффициенты при переменных неравенствах $Y.5$ должны быть заданы в необходимом соотношении. Для этого их следует скорректировать, разделив на число четыре. Для нахождения оптимального решения необходимо максимизировать значение целевой функции $z \rightarrow \max$.

Результаты расчетов (рис. 14.6) показывают, что максимальное количество комплектов заготовок z составляет 650. Для получения такого количества комплектов потребуется раскроить 200 листов (X.3) алюминиевых сплавов $R_1 = 4 \cdot 1,5$ м по варианту 3, 100 листов (X.4) $R_2 = 4 \cdot 2$ м по варианту 4. Что же касается раскроя 50 листов $R_3 = 6 \cdot 2$ м, то 41,67 из них (X.9) следует раскроить по девятому варианту, а 8,333 (X.15) по пятнадцатому варианту.

Краткое повторение

- **Раскрой листовых материалов** – раскрой плоских материалов, листов металла, резины, пластмассы, стекла, картона, обеспечивающий получение максимального числа комплектов деталей.
- **Комплектность деталей** – одно из условий раскроя листовых материалов на отдельные детали, при котором, составление комплектов деталей осуществляется с учетом лимитированного количества дефицитных заготовок.

§ 14.3. Модель раскроя рулонных материалов

Модель раскроя рулонных материалов

Раскрой рулонных материалов на заготовки в сфере промышленного производства, ставит своей целью повышение выхода деталей за счет снижения количества получаемых отходов. Модель задачи раскроя рулонных материалов предполагает нахождение наиболее рациональных вариантов раскроя металла, пластмассы, искусственной кожи, линолеума, ковровых покрытий, тканей на заготовки деталей различной конфигурации.

Поиск эффективных вариантов раскроя рулонных материалов дает возможность значительно сократить потери от межлекальных выпадов, а так же потери по ширине и непропорциональности конечных остатков. Для формализации модели раскроя рулонных материалов введем следующие обозначения:

s – номер рулонного материала;

S – число всех видов рулонных материалов;

i – вид заготовок деталей;

l_i – число всех видов заготовок деталей i ;

j – номер варианта раскроя;

n_s – число вариантов раскроя рулонного материала вида s ;

a_{sj} – нормативный коэффициент использования рулонного материала s по варианту раскроя j ;

b_s – количество рулонного материала вида s ;

k_{ij} – коэффициент выхода заготовок деталей i по варианту раскроя j ;

z_i – необходимое количество заготовок деталей i ;

ψ_{sj} – коэффициент выхода отходов при раскрое рулонного материала s по варианту раскроя j ;

§ 14.3. Модель раскроя рулонных материалов

W_s – количество концевых остатков рулонного материала s ;
 x_{sj} – количество раскроя рулонного материала s раскраиваемого по варианту j .

Критерий оптимальности – минимизация получаемых отходов и концевых остатков

$$\sum_{j=1}^{n_s} \psi_{sj} x_{sj} - W_s \rightarrow \min. \quad (14.12)$$

Ограничения: по количеству используемого рулонного материала

$$\sum_{j=1}^{n_s} a_{sj} x_{sj} - W_s = b_s, \quad s = \overline{1, S}; \quad (14.13)$$

по количеству раскроя заготовок деталей

$$\sum_{j=1}^{n_s} k_{ij} x_{sj} = z_i, \quad i = \overline{1, I}; \quad (14.14)$$

и условий неотрицательности переменных

$$x_{sj} \geq 0, \quad s = \overline{1, S}; \quad j = \overline{1, n_s}. \quad (14.15)$$

Задача раскроя рулонных материалов

Для раскроя деталей мужских костюмов четырех размеро-ростов технологами швейной фабрики разработано двенадцать наиболее рациональных вариантов раскладки лекал настилов тканей. Планом выпуска мужской одежды предусмотрено производство 3200 костюмов таких размеро-ростов: 108-90-175; 104-90-175; 100-90-175; 96-90-175. Для раскроя деталей 800 мужских костюмов четырех размеро-ростов, использована ткань шириной 1,4; 1,5 и 2,0 м, в количестве 1600, 1440 и 1200 м. Варианты раскроя тканей отличаются друг от друга, различным выходом заготовок деталей разных размеро-ростов, величиной расхода ткани, межлекальными

потерями ткани при раскрое. Наиболее рациональные варианты раскладки лекал заготовок деталей при раскрое настилов рулонных

Таблица 14.3

Варианты раскроя рулонных материалов

Вариант раскроя, м	Ширина рулона, м	Количество заготовок размеров, шт.				Расход ткани, м	Потери ткани, м ²
		108-90-175	104-90-175	100-90-175	96-90-175		
1	1,4	2				3,19	0,28
2		1	1			3,14	0,26
3			1	1		3,07	0,24
4				1	1	2,98	0,22
5	1,5	2				2,97	0,21
6		1	1			2,94	0,20
7			1	1		2,87	0,19
8				1	1	2,78	0,18
9	2,0	2				2,23	0,17
10		1	1			2,21	0,16
11			1	1		2,16	0,15
12				1	1	2,07	0,14

материалов даны в табл. 14.3. В таблице приведены двенадцать вариантов раскроя заготовок деталей сложной конфигурации: четыре для ткани шириной 1,4 м; четыре – шириной 1,5 м; четыре – шириной 2,0 м. Варианты раскроя ткани отличаются один от другого различными нормативными величинами расхода ткани разной ширины и потерями ткани. С увеличением ширины ткани, значительно уменьшается удельный расход ткани и в соответствии с этим сокращаются потери ткани. Уменьшение удельного расхода ткани и сокращение ее потерь наблюдается так же при уменьшении размера заготовок деталей.

§ 14.3. Модель раскроя рулонных материалов

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-Я: MIN							ПЕРЕМЕНН.: 15				ДАТА			04-16-2004	
БАЗИС: NONE	ОГРАНИЧЕНИЙ: 15							Ф. ПЕР.: 4				ВРЕМЯ			19:17:09	
MIN	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	X.9	X.10	X.11	X.12	W.1	W.2	W.3	RHS
COST	.28	.26	.24	.22	.21	.20	.19	.18	.17	.16	.15	.14	1	1	1	0
Y.1	3.19	3.14	3.07	2.98												= 1600
Y.2					2.97	2.94	2.87	2.78								= 1440
Y.3									2.23	2.21	2.16	2.07				= 1200
Y.4	2	1			2	1			2	1						= 800
Y.5		1	1			1	1			1	1					= 800
Y.6			1	1			1	1			1	1				= 800
Y.7				1				1				1				= 800

Рис. 14.7. Матрица модели раскроя рулонных материалов в формате пакета PLP-2000

Матрица модели задачи раскроя рулонных материалов в формате пакета PLP-2000 представлена на рис. 14.7. Матрица модели включает пятнадцать переменных и семь ограничений. Вектор-столбцами

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ							ДАТА 04-16-2004			ВРЕМЯ 19:08:58					
MINIMUM	ВВОДИМ : X.2				БАЗИС X : 6			ПЕРЕМЕН. :			15					
ТОЧЕК : 17	ВЫВОД. : X.10				БАЗИС S : 1			Ф. ПЕР. :			4					
ТОЧ. INV : 16	ОЦЕН. -.013154				COST 328.606			ОГРАНИЧЕНИЙ:			7					
BASIS	X.3	X.6	X.2	W.3	S.6	X.12	X.4									
РЕШЕН.	0	489.8	310.2	21.19	0	589.9	35.74									
ОЦЕН.	-.6678	-.7336	-1	.0667	2.29	0	2.21									

Рис. 14.8. Решение задачи раскроя рулонных материалов в формате пакета PLP-2000

матрицы модели X.1 – X.12, являются двенадцать вариантов раскроя тканей различной ширины. Варианты раскроя ткани на заготовки деталей мужских костюмов, различаются выходом деталей, норматив-

ными коэффициентами расхода материала и потерь ткани (межлекальных выпадов). Переменными $W.1 - W.3$, являются дополнительно введенные переменные, показывающие количество неиспользованной ткани (концевые остатки рулонов). Ограничениями матрицы модели $Y.1 - Y.3$, выступают ограничения лимитированных запасов тканей различной ширины, а также ограничения $Y.4 - Y.7$ выпуска костюмов четырех размеро-ростов. Коэффициентами целевой функции служат нормативные коэффициенты межлекальных потерь ткани при раскрое деталей костюмов и минимизируемые потери концевых остатков.

Результаты решения задачи (рис. 14.8.) показали, что при оптимальном раскрое 1600 м ткани шириной 1,4 м, 1440 м ткани шириной 1,5 м и 1200 м ткани шириной 2,0 м минимальные потери (**COST**) составят 328,6 м. В относительном выражении это составит 7,8 % всего количества используемой ткани. При этом 21,19 м составят концевые остатки рулона ткани **W.3** шириной 2,0 м. Если вычесть их из общего количества потерь ткани, то величина потерь составит 307,4 м или 7,3 %.

Краткое повторение

- ❑ **Концевые остатки** – потери при раскрое рулонных материалов вследствие нерациональности концевого остатка рулона.
- ❑ **Межлекальные выпады** – потери от раскроя по длине и ширине рулонных материалов при раскладке.
- ❑ **Раскрой рулонных материалов** – рациональный раскрой рулонов тканей, искусственной кожи, пластмасс, металла обеспечивающий необходимый выход заготовок, при наименьших потерях раскладок по длине и ширине.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

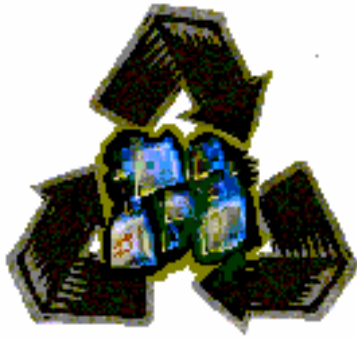
вторичный раскрой
комплектность деталей
концевые остатки
межлекальные выпады

модель оптимальной сложности
одномерный раскрой
раскрой листовых материалов
раскрой рулонных материалов

***Контрольные вопросы
и задания***



1. Модель одномерного раскроя.
2. Задача одномерного раскроя.
3. Модель раскроя листовых материалов.
4. Задача раскроя листовых материалов.
5. Модель раскроя рулонных материалов.
6. Задача раскроя рулонных материалов.
7. Решите задачи раскроя на компьютере.



Раздел VIII

Параметрические и динамические модели производства

☑ Глава 15 *Параметрические модели производства*

§ 15.1. Параметрическая оптимизация ресурсов

§ 15.2. Прогнозирование параметров моделей

§ 15.3. Параметры корреляции и классификации

☑ Глава 16 *Динамические модели производства*

§ 16.1. Модель запуска партий деталей

§ 16.2. Модель замены оборудования

§ 16.3. Модель выбора проектов

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ
ПРОИЗВОДСТВА**

В этой теме рассмотрены методы параметризации моделей, используемые в практике решения оптимизационных задач. Даны примеры расчета отдельных параметров линейных моделей с помощью методов прогнозирования, корреляционно-регрессионного анализа, кластерного анализа.

§ 15.1. Параметрическая оптимизация ресурсов

**Построение
параметрических
моделей**

Параметрическое моделирование – один из наиболее эффективных инструментариев построения экономическо-математических моделей, характеризующихся непрерывным изменением задаваемых параметров. Одной из основных особенностей построения этих моделей является то, что коэффициенты целевой функции, числовые характеристики ограничений и нормативные коэффициенты или и те и другие, предполагаются не постоянными величинами, а непрерывно изменяющимися значениями параметров (например, получаемая прибыль, затраты на производство продукции, запасы ресурсов).

***Параметр модели** – относительно постоянная величина, которая может варьировать, изменяя свои значения в некоторых заданных пределах.*

Методы параметрического моделирования и методы анализа моделей на чувствительность во многом очень схожи. Главное их различие состоит в том, что параметрическое моделирование не

ограничивается заданием дискретных величин, а предусматривает возможность изменения числовых параметров в заданных пределах. Следует также отметить, что функции, с помощью которых задается изменение коэффициентов модели, не обязательно должны быть линейными, так как вид этих функций не имеет непосредственного отношения к тем условиям задачи, которые определяют ее принадлежность к классу линейных моделей.

Параметризация экономико-математических моделей в целом существенно упрощает процесс моделирования. Она позволяет значительно повысить достоверность и точность используемой при построении оптимизационных моделей исходной информации, во многом расширяет возможности всестороннего анализа области допустимых решений вариантов развития производства, более полного учета влияния различных факторов на эффективность работы предприятий. Это предполагает использование более точных методов определения параметров оптимизационных моделей, которые принимаются в качестве заданных. К ним относятся, как правило, вариации технологических коэффициентов затрат материалов, норм затрат труда, выпуска продукции, количества имеющихся ресурсов, выпуска продукции. В практике экономико-математического моделирования указанные показатели определяются различными путями (в результате разработки детальных проектов строительства и реконструкции предприятий, проведения экспертных оценок, экстраполяции существующих соотношений и пр.), которые в большинстве случаев дают очень грубые, а нередко и ошибочные оценки их значений.

Межмодельный интерфейс параметров

Параметричность межмодельного интерфейса выражается в виде межмодельных взаимосвязей “вход–выход”, отражающих моделируемые производственные взаимосвязи промышленных предприятий. Характеристиками “входа”

при этом служат величины затрат материальных ресурсов (сырьевых, энергетических и других ресурсов) и условия их производственного потребления (технологические способы производства, природные и климатические условия и пр.), характеристиками “выхода” – результаты производства (объем выпуска готовой продукции, ее номенклатура, качество, конкурентоспособность и пр.) и показатели экономической эффективности (прибыль, себестоимость, удельные затраты,

§ 15.1. Параметрическая оптимизация ресурсов

производительность труда, фондо- энергоемкость и пр.). Параметры “входов” и “выходов” могут рассматриваться как переменные

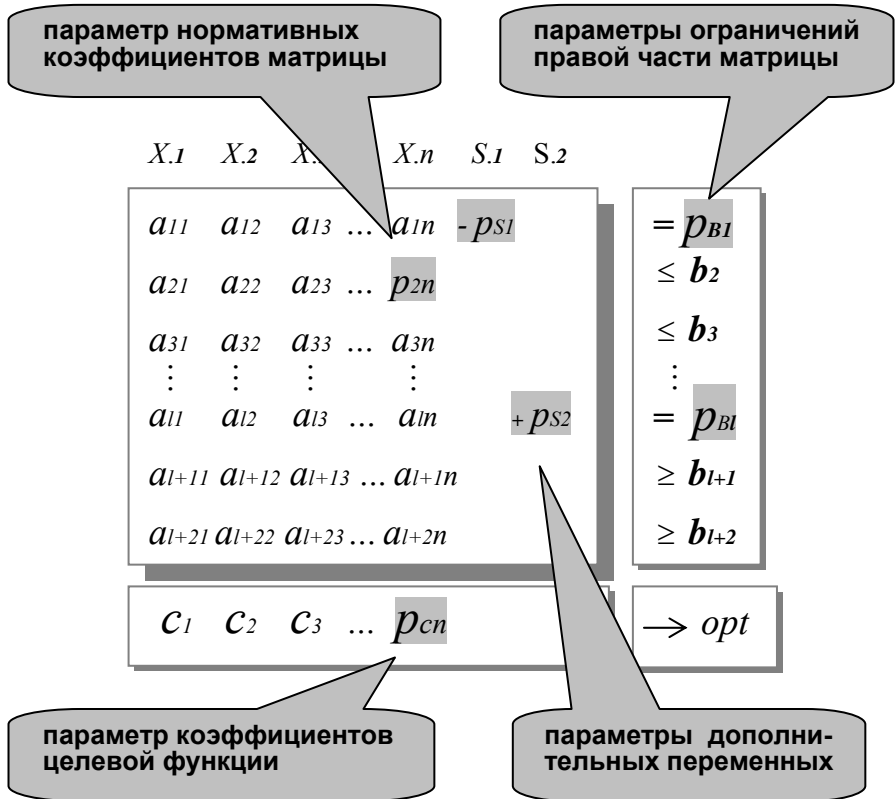


Рис. 15.1. Параметрическая схема оптимизации ресурсов

величины, находящиеся между собой в определенной зависимости. Целью этого является определение основных тенденций развития, измерения тесноты взаимосвязей, выделение исследуемых классов, полученных в результате наблюдения над выбранной совокупностью исследуемых объектов.

Построение параметрических моделей позволяет приблизить к реальности реализуемые в практике экономико-математического моделирования линейные зависимости. При этом существенно упрощается процедура получения оптимизационного решения. Преимущество использования линейных зависимостей состоит в том, что процесс вычисления в этом случае, становится менее трудоемким. Основное внимание при построении параметрических моделей будет уделено прикладным вопросам параметрических исследований, в которых используются линейные функции. Это позволит изложить основные подходы к построению параметрических моделей, не вдаваясь в детали выполнения вычислительных процедур, применяемых в случае нелинейности соотношений. При этом будет учитываться, что любая нелинейная функция одной переменной может быть аппроксимирована кусочно-линейной функцией.

Параметрическая оптимизация представляет собой метод исследования изменений решений линейных задач, обусловленных наперед заданными коэффициентами линейной модели. Параметричность модели придает решению оптимизационной задачи динамичность, т. е. позволяет исследовать влияние на оптимум изменения таких величин, как ограничения ресурсов и выпуска продукции p_{bi} , значений коэффициентов целевой функции p_{cn} , нормативных коэффициентов матрицы модели p_{in} , вводимых в модель коэффициентов дополнительных переменных p_{sj} .

Информационное обеспечение моделей

Экономико-математические методы и модели используются для решения достаточно широкого круга проблем информационного обеспечения параметрических моделей сферы промышленного производства, которые могут быть связаны как с постановкой и решением оптимизационных задач, так и с расширением их нормативной базы. К проблемам информационного обеспечения параметрических моделей относятся прогнозирование динамики развития сырьевой базы производства, спроса на продукцию, затрат на производство и величины получаемой прибыли, цены на продукцию; определение влияния различных факторов на развитие производства, эффективность работы предприятий, производительность труда, нормы затрат и выпуска продукции, расходы сырья и материалов, топлива, электрической энергии и воды;

классификация и выделение отдельных групп промышленных предприятий по величине производственной мощности, объемам выпуска продукции, численности рабочих, производственным затратам.

Построение моделей *прогнозирования динамики* развития производства, ставит своей целью учет изменения во времени параметров эффективности работы предприятий в изменяющихся экономических условиях. На большей части траектории изменение развития предприятий происходит довольно медленно, отмечается лишь плавный “дрейф” отдельных параметров. Однако в развитии существующих предприятий есть ряд периодов, когда происходит резкое изменение состояния. Это, прежде всего реконструкция, после которой экономические параметры работы предприятия могут резко измениться, а также период освоения производственных мощностей. Именно это и является основной причиной неустойчивости параметров работы предприятий. Сюда же следует отнести и постоянные изменения экономических условий работы предприятий.

Прогнозирование изменения динамики развития предприятия позволяет определить тенденции изменения значений параметров, сезонность колебаний и цикличность развития, величины запаздываний по времени (лагов). Важнейшим отправным моментом при построении таких моделей является выделение из множества переменных, описывающих изучаемое явление, одной зависимой (предсказываемой) и предположение о независимости остальных переменных. Понятно, что это положение носит несколько условный характер, поскольку в действительности процесс промышленного производства характеризуется целой системой функциональных зависимостей значений ряда параметров, причем некоторые из них, отнесенные к числу независимых переменных, могут выступать и роли функций.

Построение *регрессионной модели*. На этом этапе возникают вопросы, связанные с выбором количества и набора существенных признаков, включаемых в модель. Регрессионные модели дают возможность для получения компактного описания исследуемого явления на основе обработки больших массивов информации. Они позволяют установить количественные связи между объемом выпуска и динамикой развития производства. В отличие от других методов “сжатия информации” использование регрессионных моделей на этапе предоптимизационных вычислений дает возможность задавать полученные результаты в виде отдельных параметров. Не опираясь на

заранее заданный “априорный” перечень факторов, влияющих на изучаемые переменные, а наоборот, при соблюдении определенных правил моделирования можно обнаружить наиболее важные из этих факторов, причем скрытые (латентные).

Так например, можно наблюдать множество различных показателей статистического учета работы предприятия, чтобы выявить закономерности, влияющие на рост производительности труда (уровень квалификации рабочих, коэффициент сменности оборудования, энерговооруженность, возраст оборудования и пр.). Так или иначе все факторы, отражаемые этими показателями, воздействуют на изучаемый – производительность труда. При этом многие из них связанные между собой, могут отражают с разных сторон, те же, по существу, явления. При анализе этих связей (корреляций) можно обнаружить, что на самом деле может оказывать решающее влияние на рост производительности труда. Знание влияния этих факторов, дает возможность в случае необходимости включать их в качестве необходимых параметров в оптимизационные модели.

Построение моделей *классификации совокупностей*. Если предположение об однородности исследуемых промышленных объектов на стадии предоптимизационных вычислений не подтверждается, необходимо перейти к следующему этапу моделирования, связанному с выбором способа классификации и набора признаков, по которому должно производиться разбиение совокупности на однородные классы. Многомерная классификация (кластер-анализ), позволяет разбивать исследуемую совокупность объектов (координаты которых известны) таким образом, чтобы объекты одного класса находились на небольшом расстоянии друг от друга, в то время как объекты разных классов были на достаточном удалении друг от друга и не разбивались на столь же взаимоудаленные части. В зависимости от целей моделирования и совокупности исследуемых объектов это будет либо конечным этапом определения параметров моделей, либо промежуточным этапом моделирования.

Во всех случаях в ходе построения моделей возникает проблема отбора из общего набора показателей тех, которые являются признаками неоднородности совокупности. Здесь возникает задача определения рационального числа признаков, образующих рабочее пространство классификации. С одной стороны, чем больше число

признаков положено в основу классификации, тем устойчивее классы. При малом числе признаков конструкция классов может оказаться чрезмерно чувствительной, учет дополнительных признаков в этом случае может привести к нарушению системы классификации, и получению совершенно других классов. С другой стороны, включение в набор признаков, не вызывающих явной неоднородности совокупности показателей, распределение которых по различным группам объектов близко, ведет к смазыванию границ между классами, к нарушению четкости классификации.

В число признаков кандидатов для формирования рабочего признакового пространства в первую очередь включаются наиболее существенные качественные признаки. Отбор “претендентов” из количественных признаков требует предварительного исследования характера их распределения только в определенных интервалах числовой оси, между которыми имеются разрывы.

Основными признаками классификации промышленных предприятий при выделении отдельных групп наиболее часто выступают такие показатели как: мощность промышленного предприятия, объем выпуска продукции, численность рабочих, стоимость основных производственных фондов, прибыль, объемы инвестирования и т. п.

При использовании любого из методов разбиения на отдельные классы одним из важнейших вопросов является определение наиболее рационального числа классов. Как правило, априорно определить точное число классов в конкретных исследованиях не представляется возможным. Поэтому для определения рационального числа классов прибегают к разбиению на различное число классов (при различных параметрах) и выбирают разбиение, в наибольшей мере удовлетворяющее целям исследования.

Краткое повторение

- **Параметр модели** – относительно постоянная величина, которая может варьировать, изменяя свои значения в некоторых заданных пределах.

- ❑ **Параметрическая оптимизация** – метод исследования изменений полученных решений оптимизационных задач, на основе изменения значений задаваемых параметров модели.
- ❑ **Информационное обеспечение моделей** – обеспечение параметрических моделей данными, полученными на стадии предоптимизационных вычислений.

§ 15.2. Прогнозирование параметров моделей

Метод экспоненциального сглаживания

Метод экспоненциального сглаживания является в настоящее время одним из основных методов прогнозирования одномерных временных рядов, который дает возможность получить прогнозные оценки динамического ряда в целом и его отдельных структурных составляющих. В общем случае динамический ряд y_t ($t=1, T$) может быть разложен на трендовую составляющую x_t (включая ее разновидности – сезонную или гармоническую) и случайную составляющую ε_t :

$$y_t = x_t + \varepsilon_t. \quad (15.1)$$

При прогнозировании значений временных рядов необходимо учитывать дисконтирование исходных данных. Для учета тех тенденций, которые отмечаются в последнее время, последним точкам числового ряда следует придать, в определенном смысле, большую значимость, больший вес, а наблюдения, относящиеся к прошлому, должны иметь по сравнению с ними меньшую значимость.

Метод экспоненциального сглаживания является обобщением метода скользящего среднего, позволяет построить такое описание прогнозируемого процесса, при котором более поздним значениям ряда придается большие веса по сравнению с полученными ранее значениями, причем веса числовых значений убывают по экспоненте.

§ 15.2. Прогнозирование параметров моделей

В наиболее общем виде исходный динамический ряд может быть представлен в виде полинома:

$$y_t = a_0 + a_1 t + \dots + \frac{a_p}{p!} t^p + \varepsilon_t. \quad (15.2)$$

Для расчетов по методу экспоненциального сглаживания введем выражение

$$S_t^{[k]}(y) = \alpha \sum_{i=1}^n (1 - \alpha)^i S_{t-i}^{[k-1]}(y), \quad (15.3)$$

которое называется экспоненциальной средней порядка k для ряда y_t , где α – параметр сглаживания, $\alpha = 1 - \beta$.

Экспоненциальная средняя подчиняется следующей рекуррентной формуле:

$$S_t^{[k]}(y) = \alpha S_t^{[k-1]}(y) + (1 - \alpha) S_{t-1}^{[k]}. \quad (15.4)$$

Использование соотношений (15.3) предполагает задание начальных условий: $S_0^{[1]}, S_0^{[2]}, \dots, S_0^{[k]}$.

Для расчета значений экспоненциальных средних любого порядка используется формула Брауна–Майера, которая связывает коэффициенты прогнозируемого полинома с экспоненциальными средними соответствующего порядка.

Важную роль в методе экспоненциального сглаживания играет выбор оптимального параметра сглаживания α , так как именно он определяет оценки коэффициентов модели, а следовательно, и результаты прогноза.

В зависимости от величины параметра α прогнозные оценки по-разному учитывают влияние изменения значений исходного ряда наблюдений: чем больше α , тем больше вклад значений последних наблюдений в формирование тренда, а влияние начальных условий быстро убывает. При малых α прогнозные оценки параметров модели учитывают все наблюдения, при этом уменьшение влияния более “старой” информации происходит медленно.

**Прогнозирование
выпуска
продукции**

Прогнозирование параметров объемов выпуска продукции оптимизационной модели позволяет как можно более точно учесть динамику изменения спроса на продукцию. Рассмотрим это на примере представленной в §11.3 модели задачи диверсификации производства. В задаче требовалось с учетом наблюдаемых в последнее время устойчивых тенденций к снижению спроса на выпускаемую фабрикой обувь сократить месячный объем ее выпуска до 16800 пар, а на высвобожденных производственных площадях наладить производство металлопластиковых окон, мебели, полиэтиленовой тары и сборку персональных компьютеров. При этом исходя из имеющихся на фабрике производственных площадей и складских помещений, а также инвестируемых в расширение производства средств планировалось выпускать: металлопластиковых окон – 840 шт.; комплектов мебели – 1680 шт.; полиэтиленовой тары – 10080 шт.; персональных компьютеров – 420 шт.

Таблица 15.1

Спрос на продукцию выпускаемую предприятием

Продукция	Спрос на продукцию по месяцам					
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Обувь	16800	16700	16600	16500	16400	16300
Окна	840	840	840	840	840	840
Мебель	160	164	160	160	160	160
Тара	10080	10090	10100	10110	10120	10130
ПК	240	240	240	240	240	240

Анализ объемов выпуска и спроса на продукцию предприятия (табл. 15.1) показывает, что за шесть месяцев с начала года наметились некоторые тенденции к сокращению спроса на обувь и увеличения спроса на тару. Спрос на окна, мебель и ПК остался неизменным.

§ 15.2. Прогнозирование параметров моделей

Необходимость учета тенденций изменения спроса требует внесения определенных корректив в программу выпуска продукции.

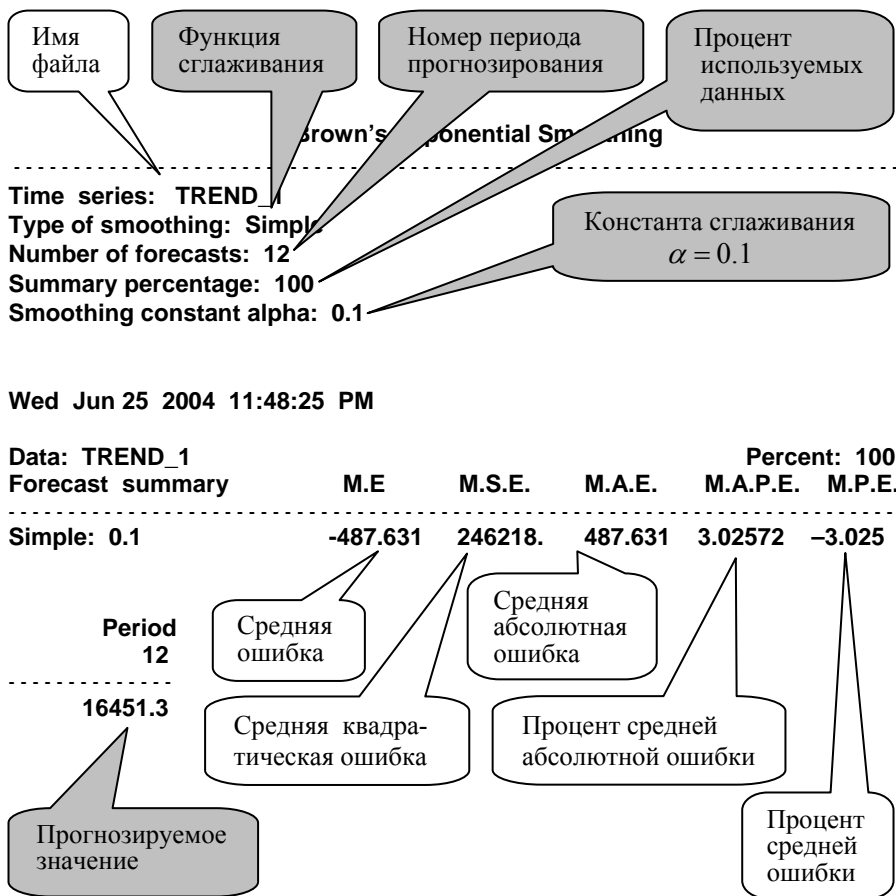


Рис. 15.2. Расчет прогнозируемого значения спроса на обувь, выпускаемую предприятием

Для установления спроса на продукцию в конце года и определения объема выпуска продукции предприятием необходимо построить

прогноз изменения спроса на обувь и производимую тару.

При прогнозировании спроса на продукцию предприятия использовался метод экспоненциального сглаживания пакета статистических программ ПСП STATGRAPHICS *Plus* for Windows. В качестве исходных данных при этом использовались показатели

Brown's Exponential Smoothing

Time series: TREND_2
Type of smoothing: Simple
Number of forecasts: 12
Summary percentage: 100
Smoothing constant alpha: 0.1

Wed Jun 25 2004 11:52:05 PM

Data: TREND_2	Percent:				
100					
Forecast summary	M.E	M.S.E.	M.A.E.	M.A.P.E.	M.P.E.
-----	-----	-----	-----	-----	-----
Simple: 0.1	34.8678	1596.85	34.8678	0.34383	0.34383

Period
12

10114.9

Рис. 15.3. Расчет прогнозируемого значения спроса на тару выпускаемую предприятием

спроса на обувь и производимую предприятием тару, взятые за шесть месяцев года. Расчеты показали (рис. 15.3), что прогнозируемый спрос на обувь предприятия в конце года составит 16451,3 пары, изготавливаемой тары – 10114,9 шт. Округлив эти величины до значения целых чисел, в свою очередь получим: обувь – 16451 пару; тара – 10115 шт. Полученные расчетные значения, соответственно составят скорректированный объем выпуска предприятием обуви и тары.

§ 15.2. Прогнозирование параметров моделей

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-ЦИЯ					ПЕРЕМЕН.: 10	ДАТ	2-2004
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ:					Ф. ПЕР.: 5	ВРЕМ	4:52:11
MAX	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5			RHS
RETURN	168	180	160	120	240			0
Y.1	300	200	250	200	250			= 1200
Y.2	60	40	80	40	60			= 280
Y.3	80	120	100	100	80			<= 480
Y.4	16800							<= 16451
Y.5		840						<= 840
Y.6			1680					<= 1680
Y.7				10080				<= 10115
Y.8					420			<= 420

Рис. 15.4. Скорректированная матрица модели диверсификации производства продукции в формате пакета PLP-2000

Скорректированная матрица модели диверсификации производства продукции представлена на рис. 15.4. Скорректированными

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ				ДАТА 09-12-2004	ВРЕМЯ 14:52:11		
MAXIMUM	ВВОДИМ :		БАЗИС X : 5		ПЕРЕМЕН. : 5			
ИТЕРАЦ : 6	ВЫВОД. :		БАЗИС S : 3		Ф. ПЕР. : 5			
ТОЧ. INV : 0	ОЦЕН. 0	RETURN 827.142		ОГРАНИЧЕНИЙ: 8				
BASIS	S.1	X.4	S.3	X.1	X.2	X.3	S.6	X.5
РЕШЕН.	64.58	1.003	24.93	.9792	1	.7638	396.7	1
ОЦЕН.	0	2	0	.0029	.119	0	.004	.1905

Рис. 15.5. Решение скорректированной задачи диверсификации производства продукции в формате пакета PLP-2000

ограничениями модели выпуска обуви и тары являются прогнозные величины предполагаемого спроса, рассчитанные на конец года.

Результаты решения скорректированной задачи диверсификации производства (рис. 15.5) показали, что снижение объемов выпуска обуви с 16800 до 16461 пар и увеличение производства тары с 10080 до 10115 шт., вызовет уменьшение величины получаемой прибыли с 868 до 827,142 тыс. грн.

Прогнозирование величины прибыли

Наряду с прогнозированием спроса на продукцию, которую выпускает предприятие, не меньший интерес представляет и исследование тенденций изменения величины получаемой прибыли. Рассмотрим это на примере задачи диверсификации производства § 11.3.

В соответствии с условиями задачи ежемесячный объем выпуска продукции предприятия должен составлять: обуви – 16800 пар, окон – 840 шт., мебели – 16800 шт., тары – 10080 шт. и ПК – 240 шт. Планируемая прибыль при этом должна составить 672 тыс. грн.

Таблица 15.2

Прибыль предприятия от выпуска продукции

Продукция	Прибыль от выпуска продукции по месяцам, грн.					
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Обувь	168000	167900	167800	167700	167600	167500
Окна	180000	180000	180000	180000	180000	180000
Мебель	160000	160000	160000	160000	160000	160000
Тара	120000	120100	120200	120300	120400	120500
ПК	240000	240000	240000	240000	240000	240000

Анализ динамики изменения величины получаемой прибыли за шесть месяцев текущего года (табл. 15.2) показывает, что неизменными остаются только показатели прибыли, которые получены от выпуска окон, мебели и ПК. Прибыль, полученная от выпускаемой

§ 15.2. Прогнозирование параметров моделей

предприятием обуви, имеет некоторую тенденцию к снижению, а прибыль от выпускаемой тары, наоборот имеет тенденцию роста. Для того, чтобы установить возможные размеры получаемой прибыли от выпуска этих видов продукции к концу года, необходимо рассчитать прогнозные значения прибыли на конец года. Для этого, как и в

Brown's Exponential Smoothing

Time series: TREND_3
Type of smoothing: Simple
Number of forecasts: 12
Summary percentage: 100
Smoothing constant alpha: 0.1

Wed Jun 25 2004 12:29:15 PM

Data: TREND_3	Percent: 100				
Forecast summary	M.E	M.S.E.	M.A.E.	M.A.P.E.	M.P.E.
Simple: 0.1	-258.188	81268.0	258.188	0.15408	-0.15408

Period
12

167451.3

Рис. 15.6. Расчет прогнозируемой прибыли, получаемой от выпуска обуви

предыдущем случае, используем метод экспоненциального сглаживания пакета ПСП STATGRAPHICS *Plus* for Windows. Исходными данными для вычислений служили показатели величины полученной прибыли от выпуска обуви за шесть месяцев текущего года. Результаты расчетов (рис. 15.6) показали, что к концу года прогнозируемая величина получаемой прибыли уменьшится на 548,7 грн и составит 167451,3 грн. Прибыль от выпуска производимой предприятием

тары (рис. 15.7), при этом составит 120258 грн, что на 258 грн больше величины полученной прибыли в начале года. Найденные расчетные значения прогнозируемой прибыли составляют скорректированные коэффициенты целевой функции матрицы модели задачи диверси-

Brown's Exponential Smoothing

Time series: TREND_4
Type of smoothing: Simple
Number of forecasts: 12
Summary percentage: 100
Smoothing constant alpha: 0.1

Wed Jun 25 2004 12:29:15 PM

Data: TREND_4	Percent: 100				
Forecast summary	M.E	M.S.E.	M.A.E.	M.A.P.E.	M.P.E.
----- Simple: 0.1	258.188	81268.0	258.188	0.21439	0.21439

Period
12

120258.0

Рис. 15.7. Расчет прогнозируемой величины прибыли получаемой от выпуска тары

фикации производства представленной на рис. 15.7. Скорректированная матрица модели диверсификации производства, представляет собой точную копию исходной матрицы модели рис. 11.5, за исключением скорректированных коэффициентов целевой функции величины получаемой прибыли от выпуска обуви и тары. Ограничениями матрицы модели служат площадь производственных и складских помещений и инвестируемых средств в развитие производства, а так же планируемые величины объемов выпуска продукции, взятые без изменений.

§ 15.2. Прогнозирование параметров моделей

ПРИМЕР	ДЕЛЕВ. Ф –Я: МАХ					РЕШЕН.: 10	ДАТА 09-12-2004
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ: 8					Ф. ПЕР.: 5	ВРЕМЯ 16:20:17
МАХ	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5		RHS
RETURN	167.45	180	160	120.26	240		0
Y.1	300	200	250	200	250		<= 1200
Y.2	60	40	80	40	60		<= 280
Y.3	80	120	100	100	80		<= 480
Y.4	16800						<= 16800
Y.5		840					<= 840
Y.6			1680				<= 1680
Y.7				10080			<= 10080
Y.8					420		<= 420

Рис. 15.8. Скорректированная матрица модели диверсификации производства продукции в формате пакета PLP-2000

Анализ результатов расчетов (рис.15.8) показывает, что величина получаемой предприятием прибыли составит 827,8 тыс. грн.

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ				ДАТА 09-12-2004	ВРЕМЯ 16:20:17		
MAXIMUM	ВВОДИМ :		БАЗИС X : 5		ПЕРЕМЕН. :	5		
ИТЕРАЦ : 6	ВЫВОД. :		БАЗИС S : 3		Ф. ПЕР. :	8		
ТОЧ. INV : 0	ОЦЕН. 0	RETURN 827.8		ОГРАНИЧЕНИЙ: 8				
BASIS	S.1	X.4	S.3	X.1	X.2	X.3	S.6	X.5
РЕШЕН.	62	1	25	1	1	.75	420	1
ОЦЕН.	0	2	0	.0028	.119	0	.004	.1905

Рис. 15.9. Решение скорректированной задачи диверсификации производства продукции в формате пакета PLP-2000

Корректирование коэффициентов целевой функции (прибыли получаемой от выпуска обуви и тары) привело к снижению величины

получаемой прибыли с 868 до 827,8 тыс. грн. При этом будет не использовано 62 м^2 производственных площадей (S.1) и не инвестировано 25 тыс. грн. (S.3). Кроме того, выпуск мебели так же уменьшится на 420 шт. (S.6).

Краткое повторение

- **Прогнозирование** – определение важнейших тенденций развития исследуемых процессов в ретроспективе, установление динамики, выделение совокупности факторов, моделирование целевых требований.
- **Метод экспоненциального сглаживания** – метод прогнозирования одномерных временных рядов, который дает возможность получения прогнозных значений как всего динамического ряда в целом, так и его отдельных составляющих.

§ 15.3. Параметры корреляции и классификации

Взаимосвязь параметров “затраты–выпуск”

При построении параметрических моделей функционирования промышленных предприятий, зависимости между величинами параметров записываются в виде системы уравнений затрат и выпуска продукции. В наиболее общей форме модель функционирования предприятия может быть сформулирована и представлена в виде зависимостей “вход – выход”. Работа предприятия при этом рассматривается как процесс

преобразования различных ресурсов в готовую продукцию.

Параметрами “входа” при этом выступают величины затрат ресурсов (сырья, материалов, топлива, электрической энергии, воды и др.) условия их потребления (технологические способы производства, природные условия и пр.); параметрами “выхода” – результаты производства (объем выпуска продукции, ее ассортимент, качество и др.) и показатели экономической эффективности (прибыль, себестоимость, производительность труда и пр.). Параметры “входов” и “выходов” могут рассматриваться как переменные величины, находящиеся между собой в определенной зависимости. Исследование этих зависимостей имеет огромное практическое значение, так как позволяет установить влияние одних переменных на другие. В ряде случаев это влияние имеет простой функциональный характер, хотя подобная ситуация крайне редка. Чаще эта связь очень сложная и нередко очень трудно отразить эту неизвестную зависимость.

Характер взаимосвязи параметров модели и их значение определяются тем, на какой стадии своего развития находится промышленное предприятие. На большей части траектории развития предприятия изменения в технологии и организации производства протекают очень медленно. Техничко-экономические показатели работы предприятий долгое время остаются неизменными. Происходит лишь плавный “дрейф” отдельных параметров. Однако в развитии промышленного предприятия существует ряд периодов, когда происходит резкое изменение состояния. Это, прежде всего реконструкция, после которой, технико-экономические параметры работы предприятия могут существенно измениться. Относительно высокой скоростью изменения величины параметров отличается также период освоения и введение в строй новых производственных мощностей. Именно это и является основной причиной неустойчивости значения параметров оптимизационных моделей предприятий, находящихся на разных этапах траектории своего развития, и радикальных изменений в технологических способах производства, происходящих в разные периоды времени. Ввод в эксплуатацию новых предприятий, особенно если доля их велика, оказывает большое влияние на эффективность промышленного производства. Однако в большинстве отраслей промышленного производства доля вновь вводимых предприятий относительно невелика, и главным источником развития производства является развитие действующих предприятий.

В многофакторных моделях нахождение уравнения связи представляет собой довольно сложную задачу, так как действия различных факторов достаточно тесно переплетаются. Связано это с тем, что в многофакторных моделях исследуется связь между одной зависимой переменной y и рядом независимыми переменными x_j , $j=1, n$. Наличие связи между этими переменными, устанавливается путем качественного анализа, позволяющего наиболее полно показать внутреннюю сущность изучаемого явления и как можно глубже раскрыть порождающие его причины. Сам же корреляционный анализ предназначен для количественного измерения выявленной связи, хотя он нередко способствует и уточнению выводов качественного анализа. При этом еще большее значение приобретает анализ характера связи каждого из факторов с зависимым показателем. Если эта зависимость носит линейный характер или близка к ней, уравнение множественной корреляции для n факторов имеет следующий вид:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n. \quad (15.5)$$

Не исключается, возможность использования в моделях множественной корреляции и более сложных нелинейных функций. Однако потребность в этом возникает крайне редко, в связи с довольно громоздкими вычислениями и сложностью экономической интерпретации полученных результатов.

Стремление учесть в модели множественной корреляции как можно большее число факторов, приводит к тому, что модель становится чрезмерно громоздкой, а влияние значительного числа факторов оказывается несущественным. Поэтому для включения в корреляционную модель должны отбираться только те факторы, которые способны оказывают наиболее сильное воздействие на величину анализируемого показателя.

Решение многофакторных моделей с помощью парных корреляций предполагает нахождение коэффициентов парной корреляции, определение на этой основе коэффициентов регрессии в стандартном масштабе (β коэффициентов) и переход от них к собственно коэффициентам множественной регрессии – параметрам корреляционной формулы. Парный коэффициент корреляции между факторами k и l

вычисляется по следующей формуле:

$$r_{kl} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_{ik} - \bar{x}_k) \cdot (x_{il} - \bar{x}_l)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_{ik} - \bar{x}_k)^2 \cdot \sum_{i=1}^m (x_{il} - \bar{x}_l)^2}}. \quad (15.6)$$

Он служит показателем тесноты линейной зависимости, но только в случае совместного, нормального распределения случайной величины, выборками которой являются факторы k и l , парный коэффициент корреляции которой характеризует тесноту связи между случайными величинами.

Для проверки гипотезы о равенстве нулю парного коэффициента корреляции используется статистика распределения по закону Стьюдента с $m - 2$ степенями свободы:

$$t_p = \frac{|r_{kl}| \cdot \sqrt{m-2}}{\sqrt{1-r_{kl}^2}}. \quad (15.7)$$

Парные коэффициенты корреляции опосредованно учитывают влияние других факторов. Для исключения этого влияния определяют частные коэффициенты корреляции. Частный коэффициент корреляции первого порядка между факторами k и l характеризует тесноту их линейной связи при фиксированном значении фактора j . Он определяется как

$$r_{ki \cdot j} = \frac{r_{kl} - r_{kj} \cdot r_{ij}}{\sqrt{(1-r_{kj}^2) \cdot (1-r_{il}^2)}}. \quad (15.8)$$

Частный коэффициент корреляции распределения аналогичен парному при тех же предпосылках, и для проверки его значимости используется статистика (15.7), в которой число степеней свободы равно $m - 3$, а не $m - 2$.

При построении доверительных интервалов для коэффициентов корреляции используется преобразование Фишера:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \lg \frac{1+r}{1-r}, \quad (15.9)$$

где r – парный или частный коэффициент корреляции.

$100 \cdot (1 - \alpha) \%$ – ный доверительный интервал (V_1, V_2) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} V_1 &= V - S \cdot Z(1 - A/2), \\ V_2 &= V + S \cdot Z(1 - A/2), \end{aligned}$$

где Z – распределение аппроксимируется нормальным законом $N(0, 1)$; $S = 1/(m - 3)$ для парного коэффициента корреляции; $S = 1/(m - 4)$ для частного коэффициента корреляции.

Применяя обратное преобразование Фишера, отображаем интервал (V_1, V_2) в $100 \cdot (1 - \alpha) \%$ – ный доверительный интервал для r . Обратное преобразование Фишера имеет вид:

$$r = \frac{EXP(2 \cdot V) - 1}{EXP(2 \cdot V) + 1}. \quad (15.10)$$

Рассмотрим решение задачи, связанное с определением параметров множественной корреляционно-регрессионной модели.

Определение параметров множественной регрессии

Основными методологическими трудностями расчета коэффициентов затрат и выпуска продукции оптимизационных моделей является установление наиболее влияющих факторов и определение функции затрат. Экономико-математическое моделирование параметров

функции затрат материалов и себестоимости продукции, позволяет с необходимой степенью точности определить возможную величину этих затрат в прогнозируемом периоде для новых видов выпускаемой продукции. Примером решения такой задачи может

§ 15.3. Параметры корреляции и классификации

служить установление коррелируемых зависимостей между затратами на производство обуви и удельными расходами материалами в модели специализации предприятия (§11.1). Нормы расхода используемых материалов при изготовлении моделей обуви трех видов представ-

Таблица 15.3

Расход материалов и затраты на производство моделей обуви

Номер модели	Выпускаемая обувь	Удельный расход материалов				Затраты на 1 пару обуви, грн.
		Кожа верха обуви, дм ²	Кожа подкладки, дм ²	Клей, г	Нитки, м	
1	Туфли мужские	22,1	15,0	47	7,8	38
2		22,3	15,2	48	7,9	39
3		22,5	15,4	50	8,0	40
4		22,7	15,6	51	8,1	41
5	Полуботинки мужские	28,2	20,1	58	7,8	48
6		28,3	20,2	59	7,9	49
7		28,5	20,4	60	8,0	50
8		28,7	20,6	61	8,1	51
9	Ботинки мужские	30,4	21,3	63	9,8	68
10		30,5	21,4	64	9,9	69
11		30,6	21,5	65	10	70
12		30,7	21,6	66	11	71

лены в табл. 15.3. В этой таблице даны нормы расхода кожи для верха обуви, кожи для подкладки, клея и ниток для выпускаемых предприятием четырнадцати моделей мужских туфель, полуботинок и ботинок. Здесь, так же приведены удельные затраты на производство четырнадцати моделей мужской обуви.

Применение в качестве программного средства решения задачи реализуемой в ПСП STATGRAPHICS *Plus* for Windows процедуры

REGRESSION ANALYSIS – множественной регрессии, дало возможность проанализировать связь между одной зависимой и четырьмя независимыми переменными. Оценка параметров уравнения множественной регрессии и нахождение средней величины случайной переменной при этом были получены с помощью метода наименьших квадратов. Исходной информацией для построения регрессионной

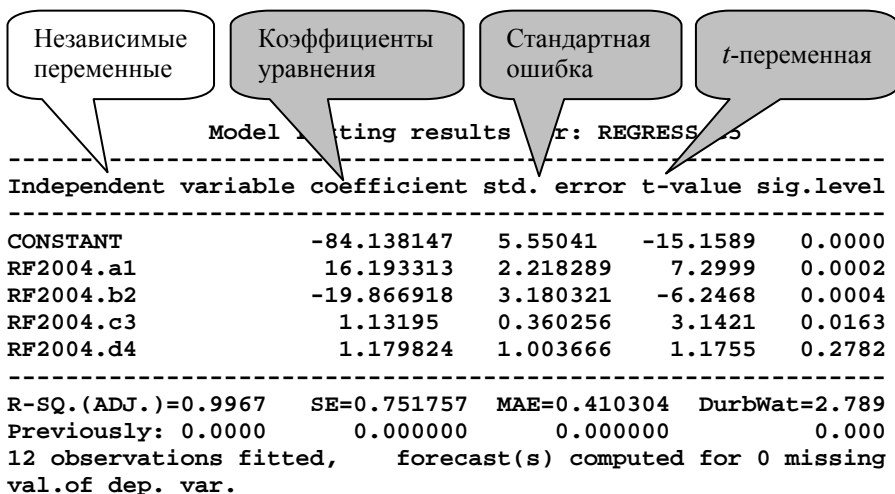


Рис.15.10. Расчет параметров уравнения множественной регрессии

модели послужили данные табл. 15.3. Модель, построенная на основе полученных расчетных значений параметров уравнения множественной регрессии (рис. 15.9) имеет следующий вид:

$$Y = -84.1 + 16.2X.1 - 19.8X.2 + 1.1X.3 + 1.2X.4.$$

Построенная регрессионная модель используется для установления норм расхода материалов и затрат на производство как для разработанных моделей обуви, так и проектируемых. Найденные коррелируемые зависимости между коэффициентами затрат и выпуска продукции в дальнейшем используются для наполнения технологических способов производства оптимизационной модели специализации

§ 15.3. Параметры корреляции и классификации

обувного предприятия. Рассмотрим это на примере задачи, которая представлена в § 11.1. Коэффициенты матрицы модели технологических способов затрат и выпуска продукции скорректированы в

ПРИМЕР	ЦЕЛЕВ. Ф-Я: MIN						ПЕРЕМЕНН.: 12			ДАТА			12-09-2004
БАЗИС:	ОГРАНИЧЕНИЙ: 15						Ф. ПЕР.: 7			ВРЕМЯ			20:10:14
MIN	X.1	X.2	X.3	X.4	X.5	X.6	X.7	X.8	X.9	X.10	X.11	X.12	RHS
COST	52000	48000	45000	54400	46500	44000	55000	57800	48000	40000	45000	61200	0
Y.1	57.5	60	54	55.4	51.75	55	60	53.6	52.5	50	54	56.7	<= 170.5
Y.2	8.8	9.6	7.2	7.8	7.7	8.8	8	8.3	7.8	8	7.2	8.8	<= 26.6
Y.3	265.8	270.0	256.6	267.5	239.4	247.5	313.5	258.4	243.3	224.5	256.5	273.6	<= 858.1
Y.4	187.3	184.8	183.6	187.4	168.9	166.4	224.1	181.1	171.9	154	183.6	191.7	<= 602.7
Y.5	400	1200			350	1100			300	1000			<= 1200
Y.6	300		900		300		1100		300		900		<= 1000
Y.7	300			880	250			850	300			900	<= 900

Рис. 15.11. Скорректированная матрица модели оптимального варианта специализации в формате пакета PLP-2000

сторону уменьшения затрат на производство обуви и сокращения удельных расходов используемых материалов (рис. 15.11). В качестве предназначенных к выпуску моделей мужских обуви были выбраны

ПРИМЕР	РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ							ДАТА	12-09-2004	ВРЕМЯ	20:10:14	
MAXIMUM	ВВОДИМ : X.4							БАЗИС X :	3	ПЕРЕМЕН. :	12	
ИТЕРАЦ :	4	ВЫВОД. : X.12							БАЗИС S :	4	Ф. ПЕР. :	7
ТОЧ. INV :	0	ОЦЕН. - 5440							COST	158636	ОГРАНИЧЕНИЙ :	7
BASIS	S.1	S.2	S.3	S.4	X.2	X.7	X.12					
РЕШЕН.	1.841	1.023	1.02	1.841	1	1	1.023					
ОЦЕН.	0	0	0	0	40	50	61.82					

Рис. 15.12. Решение скорректированной задачи оптимального варианта специализации в формате пакета PLP-2000

модели туфель и полуботинок, а также модель ботинок, затраты на производство которой наименьшие. Результаты расчетов (рис.15.12) показали, что затраты на производство мужской обуви при сохранении

объемов производства на прежнем уровне сократятся с 166000 до 158636 тыс. грн. Экономия расхода материалов при этом составит: клея – 1,841 кг, ниток – 1023 м, кожи для верха обуви – 1,020 м² и кожи для подкладки – 1,841 м².

Параметры классификации предприятий

При классификации различных промышленных объектов (предприятий, цехов, участков) следует определить набор признаков, по которым должно производиться разбиение исследуемой совокупности на однородные классы. При формировании рабочего признакового пространства необходимо установить, нужно ли ориентироваться на качественные или количественные признаки или комбинацию этих признаков. Во всех случаях в ходе построения модели возникает проблема отбора из общего набора признаков тех, которые являются причиной неоднородности совокупности. Здесь возникает дилемма определения рационального числа признаков, образующих рабочее пространство классификации. С одной стороны, чем больше число признаков положенных в основу классификации, тем устойчивее классы. При малом числе признаков конструкция классов может оказаться чрезмерно чувствительной, учет дополнительных признаков в этом случае может привести к нарушению системы классификации, к получению совершенно других классов. С другой стороны, включение в набор признаков, не вызывающих явной неоднородности совокупности, распределения которых по разным группам объектов близки, ведет к смазыванию границ между классами, нарушению четкости классификации. Точного решения проблемы выбора рационального набора признаков пока нет. Поэтому на практике очень часто прибегают к методу последовательных приближений, с опробованием разных вариантов. В числе признаков-кандидатов для формирования рабочего признакового пространства в первую очередь включают наиболее существенные качественные признаки. Отбор “претендентов” из количественных признаков требует предварительного исследования характера их распределения и связи с моделируемым показателем. При этом следует обратить внимание на те количественные признаки, значения которых располагаются только в определенных интервалах числовой оси, между которыми имеются разрывы.

Выбор способа разбиения исследуемой совокупности на классы

зависит от характера исходного материала. Если выбор признаков-кандидатов включает в основном качественные признаки и близкие к ним, то целесообразно выбирать многошаговый процесс последовательного разбиения, когда на первом шаге совокупность разбивается по признаку с наибольшим весом, неоднородности, на втором шаге каждая из полученных частей разбивается по своему информационному признаку и т. д.

При использовании любого из способов разбиения один из важных вопросов построения дискретной части модели – определение рационального числа классов. Как правило, априорно определить точное число классов в конкретных исследованиях не представляется возможным. Поэтому для определения рационального числа классов прибегают к разбиению на различное число классов (при различных параметрах) и выбирают разбиение, в наибольшей мере удовлетворяющее целям исследования. Следовательно, возникает необходимость во введении оптимального критерия, позволяющего остановиться на каком-то разбиении. Выбор такого критерия должен основываться на конечной цели классификации.

Классификация промышленных предприятий

В зависимости от априорных данных о природе выделяемых классов промышленных предприятий и конечных прикладных целей исследования, могут быть использованы самые различные методы классификации объектов.

Методы *автоматической классификации* (кластер-анализа) многомерных наблюдений используются тогда, когда отсутствуют необходимые основания для параметрического представления искомых классов, а подчас даже затруднительна какая-либо интерпретация результатов классифицируемых наблюдений. Методы *иерархической классификации* используются тогда, когда на “выходе” предполагается иметь не столько окончательный вариант разбиения исследуемой совокупности объектов на классы, сколько общее представление о стратифицированной структуре этой совокупности.

Приступая к решению задачи классификации, необходимо с самого начала четко представлять, какую именно из двух задач он решает. Рассматривает ли он обычную задачу разбиения статистически обследованного диапазона изменения значений анализируемых признаков на интервалы, в результате чего совокупность объектов

разбивается на некоторое число групп так, что объекты одной группы находятся друг от друга на сравнительно небольшом расстоянии, либо он пытается определить естественное расслоение исходных объектов наблюдений на четко выраженные классы, ступки, лежащие друг от друга на некотором расстоянии, но не разбиваемые на столь же удаленные части.

При применении различных процедур классификации (кластер-процедур) необходимо учитывать расстояние между целыми группами объектов, а также меру близости двух групп объектов. Приведем пример наиболее распространенных расстояний и мер близости, характеризующий взаимное расположение отдельных групп объектов. Пусть S_i – группа i (класс, кластер) объектов, n_j – число объектов, образующих группу S_i , вектор $X(i)$ – “центр тяжести” группы i , а $\rho(S_i, S_m)$ – расстояние между группами S_i и S_m .

Рассмотрим наиболее употребляемые и наиболее общие расстояния и меры близости между классами объектов.

Расстояние, измеряемое по принципу “ближнего соседа”,

$$\rho_{\min}(S_i, S_m) = \min_{X_i \in S_i, X_j \in S_m} d(X_i, X_j). \quad (15.11)$$

Расстояние, измеряемое по принципу “дальнего соседа”,

$$\rho_{\max}(S_i, S_m) = \max_{X_i \in S_i, X_j \in S_m} d(X_i, X_j). \quad (15.12)$$

Расстояние, измеряемое по “центрам тяжести” групп,

$$\rho(S_i, S_m) = d(\bar{X}(l), \bar{X}(m)). \quad (15.13)$$

Расстояние, измеряемое по принципу “средней связи”,

$$\rho(S_i, S_m) = \frac{1}{n_i n_m} \sum_{X_i \in S_i} \sum_{X_j \in S_m} d(X_i, X_j). \quad (15.14)$$

Мера близости групп, основанная на **потенциальной функции**,

$$r(S_i, S_m) = \frac{1}{n_i n_m} \sum_{X_i \in S_i} \sum_{X_j \in S_m} K(X_i, X_j). \quad (15.15)$$

§ 15.3. Параметры корреляции и классификации

Для классификации технологических способов производства моделей обуви на предприятии, представленных в табл. 15.3, была использована процедура кластерного анализа – CLUSTER ANALYSIS ПСП STATGRAPHICS *Plus* for Windows. Классификация двенадцати технологических способов по таким показателям, как удельный рас-

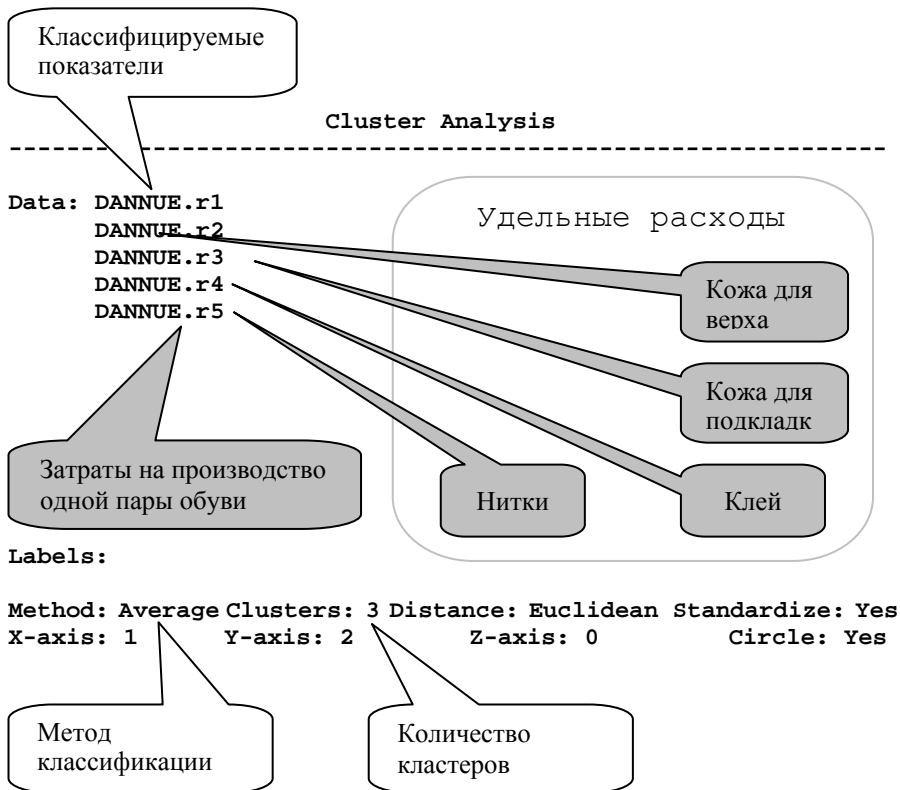


Рис. 15.13. Параметры классификации моделей обуви

ход материалов (кожа для верха обуви и для подкладки, клей и нитки) и затраты на производство показала, что разбиение исследуемой совокупности моделей обуви на три группы (туфли, полуботинки и

мужские ботинки) показывает на естественное расслоение каждой из полученных групп. Выбор числа классов в данном примере, основывался на числе видов выпускаемой предприятием мужской обуви. В результате классификации технологических способов производства по пяти параметрам с помощью метода средней связи были получены

Results of Clustering by Average Method				
Observation	Cluster	Cluster	Frequency	Percentage
1. Obs. 1	1	1	4	33.3333
2. Obs. 2	1	2	4	33.3333
3. Obs. 3	1	3	4	33.3333
4. Obs. 4	1			
5. Obs. 5	2			
6. Obs. 6	2			
7. Obs. 7	2			
8. Obs. 8	2			
9. Obs. 9	3			
10. Obs. 10	3			
11. Obs. 11	3			
12. Obs. 12	3			

Рис. 15.14. Результаты классификации моделей обуви

отдельные кластеры, содержащие по четыре модели мужской обуви. Модели обуви по группам (рис. 15.14) распределились достаточно равномерно. Удельный вес каждой группы при этом составил 33,33 %. Сравнительный анализ основных классов, полученных по пяти массивам основных показателей, свидетельствует об их абсолютной устойчивости: совпадение классов по составу составляет 100 %. Состав классов мужской обуви при этом включает отдельные модели туфель, полуботинок и ботинок, удельный расход материалов на производство которых и затраты довольно плавно изменяются.

Осуществляя постановку задачи оптимизации функционирования промышленного предприятия с использованием методов корреляционно-регрессионного анализа и кластерного анализа для обработки исходной информации на этапе предоптимизационных вычислений, мы имеем возможность найти такое ее состояние, которое отлично от фактического.

Краткое повторение

- ❑ **Многомерная классификация** – метод обработки многомерных статистических данных, направленный на выявление характера и структуры взаимосвязей между компонентами исследуемого многомерного признака, который предназначен для проведения научных и практических исследований.
- ❑ **Кластерный анализ** – метод многомерного анализа, позволяющий разбивать исследуемую совокупность на отдельные классы, так, что элементы одного класса находятся на близком расстоянии друг от друга, в то время как разные классы достаточно удалены друг от друга.
- ❑ **Методы автоматической классификации** – методы кластерного анализа, используемые тогда, когда отсутствует необходимое основание для параметрического представления искомым классов или затруднена интерпретация результатов производственных вычислений.
- ❑ **Методы иерархической классификации** – методы кластерного анализа, используемы тогда, когда необходимо получить не столько окончательный вариант разбиения исследуемой совокупности на классы, сколько общее представление о стратификации (расслоении), структуре совокупности.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

автоматическая классификация иерархическая классификация информационное обеспечение модели кластерный анализ метод экспоненциального сглаживания	многомерная классификация параметр модели параметрическая оптимизация прогнозирование
--	--

***Контрольные вопросы
и задания***



1. Построение параметрических моделей.
2. Межмодельный интерфейс параметров.
3. Информационное обеспечение моделей.
4. Метод экспоненциального сглаживания.
5. Прогнозирование объема выпуска продукции.
6. Прогнозирование величины прибыли.
7. Взаимосвязь параметров “затраты–выпуск”.
8. Определение параметров множественной регрессии.
9. Параметры классификации предприятий.
10. Классификация предприятий.

Глава

16

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

В этой главе рассмотрены основные особенности построения динамических моделей. Даны модели запуска партий деталей, замены оборудования, выбора проектов. Представлены методы последовательного анализа вариантов, рекуррентных соотношений. Проанализированы результаты полученных решений.

§ 16.1. Модель запуска партий деталей

Специфика динамического моделирования

В динамических моделях промышленного производства технологические процессы выпуска продукции, рассматриваются как процессы, которые протекают во времени. Весь процесс производства продукции при этом, разделяется на ряд отдельных временных периодов (этапов времени), для каждого из которых находится оптимальное решение (последовательно для каждого этапа), обеспечивая оптимальное развитие всего процесса производства в целом. Динамическое моделирование является эффективным инструментарием экономических исследований, позволяющим осуществлять оптимальное управление процессом производства во времени на всех его этапах.

Принцип оптимальности поэтапного решения дает возможность установить соотношения между экстремальными значениями целевой функции в задачах, характеризующихся различной продолжительностью процесса и различными начальными состояниями. При этом необходимо учитывать последствия реализации найденного оптимального решения и для последующих решений. Такой подход

обуславливает выработку оптимальной стратегии. Процесс принятия решения в этом случае является многошаговым. При решении вариантных оптимизационных задач с помощью методов динамического моделирования последние разбиваются на отдельные этапы, каждый из которых решается самостоятельно. Тем самым решение одной сложной задачи со многими переменными сводится к решению ряда задач с меньшим числом или даже с одной переменной.

При помощи динамических моделей решаются вариантные оптимизационные задачи с заданным критерием оптимальности, с определенными связями между переменными и целевой функцией, выраженными системой уравнений. При этом как и в линейных моделях, ограничения могут быть заданы в виде равенств или неравенств. Однако если в линейных моделях зависимости между целевой функцией и переменными обязательно линейны, то в динамических моделях эти зависимости могут носить нелинейный характер. Динамические модели можно использовать как для решения задач, связанных с динамикой производственных процессов и систем управления, так и для статических задач, связанных с распределением лимитированных ресурсов. Это значительно расширяет область возможного применения динамических моделей для решения задач промышленного производства.

Вместе с тем, динамическим моделям присущи и определенные недостатки. Прежде всего нет единого универсального метода решения динамических задач. В отличие от линейных моделей, которые в практике моделирования могут быть решены при помощи симплексного метода, ставшего универсальным, в динамическом моделировании такого метода не существует. Каждая задача имеет свои особенности, и в каждом случае необходимо найти наиболее подходящий метод ее решения. Это во многом осложняет возможности использования динамического моделирования. Кроме того, большие объемы и трудность решения многошаговых задач также ограничивают область применения динамических моделей. При очень большом числе переменных решение динамической задачи даже с использованием современных компьютеров может оказаться довольно проблематичным. Это обуславливает необходимость отбора для построения динамических моделей таких решаемых задач, которые характеризуются малым количеством переменных и не очень большой размерностью.

При поиске оптимизационных решений, связанных с решением динамических задач, может оказаться, что процесс рассматривается как многошаговый, имеет очень много состояний. В этом случае в качестве одного из методов решения, можно использовать метод *последовательного анализа вариантов* или оценки списка состояний. В основе этого метода лежит анализ сжатой информации, что позволяет в случае необходимости воссоздать требуемые для расчетов значения функций.

Методами последовательного анализа вариантов или обработки списков состояний можно решать задачи определения оптимального размера партии запуска деталей (пополнения склада инструментами или заготовками широкого применения). При решении этой задачи минимизируются суммарные издержки, которые могут иметь место при дефиците выпуска деталей или их избытке. Колебания спроса вызывают изменения номенклатуры выпускаемой продукции в разные периоды времени, а также программ выпуска отдельных изделий в условиях мелкосерийного или неустойчиво серийного производства. Колебания спроса по отношению к среднегодовому объему выпуска отдельных деталей могут быть весьма существенными.

Одним из основных методов динамического моделирования является метод *рекуррентных соотношений*, основанный на использовании принципа оптимальности. Этот принцип приемлем для решения динамических задач, характеризующихся определенной стратегией шагов рассматриваемого процесса, а также для целевых функций, критерий оптимальности у которых аддитивен.

С помощью метода рекуррентных соотношений решаются задачи: размещения производства какой-либо продукции на n предприятиях, причем такое размещение должно обеспечивать минимум суммарных затрат; определения кратчайшего пути достижения цели в графической модели (найти наилучший вариант раскроя металла, идущего на различные заготовки и т. д.).

Наиболее целесообразно методы динамического моделирования применять для решения таких задач, в которых поиск оптимального решения требует поэтапного подхода: определения времени замены оборудования с учетом затрат на эксплуатацию оборудования, на приобретение нового оборудования, первоначальной стоимости данного оборудования, стоимости получаемой на нем продукции; поиска неисправности; пополнения склада деталями широкого

применения; поиска кратчайшего пути на графе и т. д.

**Модель
запуска партий
деталей**

Формализация динамической модели запуска партий деталей неизменно предусматривает формулировку целей решения задачи, а также фиксацию состояния объекта управления на момент решения задачи. Рассмотрим модель

определения оптимального размера партии запуска – выпуска деталей, обеспечивающую минимальные удельные затраты на их производство.

Модель оптимизации размера партии запуска учитывает:

- удельные затраты на производство деталей P , которые изменяются строго в соответствии с размером партии;
- удельные затраты C_{xp} на хранение деталей на складе;
- удельные затраты C_{np} , связанные с простоем оборудования при переходе на обработку партии деталей (затраты на ознакомление с порядком выполнения операций на данном оборудовании, на его наладку, т. е. на подготовительно-заключительные операции).

Если годовая потребность в выпуске деталей определяется числом – N , количество партий запуска деталей – R , а размер партии запуска – n (нам требуется ее определить), то годовая потребность будет равняться $N = nR$. Количество запущенных в течение года партий деталей равно $R = N/n$.

Пусть величина складского запаса принимается равной половине размера партии запуска – выпуска деталей. В этом случае величина складского запаса деталей будет равна $0,5n$.

Затраты на производство деталей Z_{np} будут равны затратам на изготовление N деталей плюс стоимость R запусков деталей:

$$Z_{np} = PN + C_{np}R. \tag{16.1}$$

Затраты на хранение Z_{xp} будут равны соответственно:

$$Z_{xp} = 0,5nC_{xp}R. \tag{16.2}$$

Тогда общая величина затрат будет равна:

$$Z_{об} = Z_{np} + Z_{xp}. \tag{16.3}$$

§ 16.1. Модель запуска партий деталей

В более дельной форме общая величина затрат будет равна:

$$Z_{об} = PN + C_{np}R + 0,5nC_{xp}. \quad (16.4)$$

Эти затраты необходимо минимизировать, найдя необходимый размер партии запуска – выпуска деталей n . Для этого возьмем производную по n .

$$n = \sqrt{2NC_{np} / C_{xp}}. \quad (16.5)$$

Определим эти затраты для различных размеров партий запуска – выпуска деталей, а затем из полученных значений выберем мини-

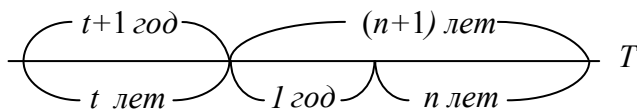


Рис. 16.1. Размеры партии запуска–выпуска деталей

мальную величину. В графическом виде определение размера партии запуска – выпуска деталей, представлено на рис. 16.1.

Задача запуска партий деталей

Рассмотрим задачу определения оптимального размера партии запуска – выпуска деталей, обеспечивающего минимальные удельные затраты на их производство. Пусть годовая потребность N в изготавливаемых деталях составляет 4200 шт. Размер партии запуска – выпуска деталей n , задается дискретными числовыми значениями ряда: $n_1 = 20$; $n_2 = 30$; $n_3 = 40$; ... ; $n_7 = 70$. Удельные затраты, связанные с хранением деталей на складе C_{xp} составляют 1,2 грн. Удельные затраты на изготовление деталей P , а также затраты на переналадку оборудования C_{np} для каждой партии различны. Все эти затраты у выбранной партии должны быть минимальными. Определим сумму этих затрат для различных размеров партий запуска – выпуска

Таблица 16.1

Исходные данные для расчета запуска партий деталей

Исходные данные	Размер партий деталей, n					
	20	30	40	50	60	70
Удельные затраты на изготовление деталей P грн.	4,41	2,92	2,15	1,71	1,41	1,17
Удельные затраты на переналадку оборудования $C_{пр}$ грн.	2,21	1,46	1,08	0,86	0,71	0,59

деталей, а затем из полученных значений выберем минимальную расчетную величину. Исходные данные для решения задачи по

Таблица 16.2

Расчет показателей запуска партий деталей

Расчетные величины	Размер партий деталей, n					
	20	30	40	50	60	70
Количество партий запуска деталей R	210	140	105	84	70	60
Запас деталей на складе $0,5 n$	10	15	20	25	30	35
Затраты на запуск партии деталей PR	88,2	87,6	86	85,5	84,6	81,9
Затраты на хранение запаса деталей Z_{xp}	12	18	24	30	36	42

каждой партии запуска – выпуска приведены в табл. 16.1. Для аналитического решения этой задачи выполним ряд необходимых вычислений. Для каждого размера партий деталей определим расчетное

§ 16.1. Модель запуска партий деталей

количество запусков R , величину необходимого запаса деталей $0,5n$, затраты на запуск партии деталей PR и затраты на хранение $Z_{xp} = 0,5nC_{xp}$. Для удобства эти расчетные величины поместим в отдельную табл. 16.2. На основании рассчитанных показателей

Таблица 16.3

Значения расчетных параметров

Размер партии деталей n	Значение параметра грн.			
	PN	$C_{np}R$	$0,5nC_{xp}$	$Z_{об}$
20	18522	464,10	12	18998,10
30	12264	204,40	18	12486,40
40	9030	113,40	24	9167,40
50	7182	72,24	30	7284,24
60	5922	49,70	36	6007,70
70	4914	35,40	42	4991,40

запуска партий установим затраты на производство каждой из шести партий деталей Z_{np} , для чего вначале определим затраты на выпуск всех деталей PN и стоимость запусков $C_{np}R$. Затем определим затраты на хранение $0,5nC_{xp}$. Просуммировав эти показатели, найдем общую величину затрат $Z_{об}$. Найденные значения параметров расчетных величин представлены в табл. 16.3. Результаты расчетов показывают, что по мере увеличения размера партий деталей затраты на ее запуск снижаются. Наименьшими будут затраты для партий запуска – выпуска деталей размером 60–70 штук. Это подтверждает и расчет

$$n = \sqrt{2 * 4200 * 0,59 / 1,2} = 64,3$$

минимальной величины затрат для партий запуска деталей, который получен по формуле (16.5). Для данного примера установленная величина партии запуска–выпуска деталей находится в интервале 60–70 шт. и численно равняется 64,3 шт.

Краткое повторение

- ❑ **Метод последовательного анализа вариантов** (оценки списка состояний) – метод решения динамических задач, в основе которого лежит анализ сжатой информации, воссоздающий при необходимости требуемые значения функций.
- ❑ **Метод рекуррентных соотношений** – метод решения динамических задач, предполагающий определенную стратегию шагов моделируемого процесса, а также целевую функцию, критерий оптимальности которой аддитивен.

§ 16.2. Модель замены оборудования

Моделирование замены оборудования

Решение о замене оборудования в промышленном производстве определяется возможностями установленных на предприятиях станков и технологического оборудования, эксплуатационными расходами, остаточной стоимостью оборудования, которая зависит от его возраста и первоначальной стоимости. Необходимо найти оптимальный вариант эксплуатации промышленного оборудования, проработавшего t лет, при условии получения наибольшего дохода за плановый период N . При этом следует учитывать такие альтернативы принятия решения: сохранить имеющееся оборудование в течение всех N лет, так как его замена на новое большого дохода предприятию не принесет; в таком-то из годов периода времени заменить действующее оборудование новым,

§ 16.2. Модель замены оборудования

требующим меньших затрат на поддержание оборудования в рабочем состоянии (меньших эксплуатационных затрат). Каждую из выбранных альтернатив оцениваем по величине получаемого дохода. Максимизация результатов дохода и определяет оптимальную стратегию использования производственных фондов. Для решения этой задачи необходимо установить, какие из факторов определяют величину получаемого дохода. Установленное влияние факторов затем используется для записи в формализованном виде найденных зависимостей и расчета по полученным уравнениям искомых показателей (величины получаемого дохода в случае эксплуатации имеющегося оборудования или приобретения нового).

Формализация модели замены оборудования

Если принять, что $r(t)$ – стоимость продукции производимой за год на единице оборудования, возраст которого t лет; $l(t)$ – ежегодные затраты на обслуживание этого оборудования; $s(t)$ – остаточную стоимость оборудования; p – стоимость нового оборудования. Определим оптимальный цикл замены оборудования в период времени длительностью N лет, причем за оставшиеся N лет прибыль $f(t)$ от использования оборудования возрастом t лет должна быть максимальной.

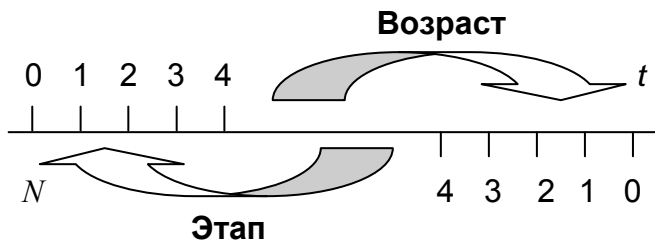


Рис. 16.2. Возраст и этапы замены оборудования

В динамической модели задачи замены оборудования возраст оборудования отсчитывается в прямом направлении, а этапы, на которые разбит процесс, – в обратном. Возраст $t=0$ соответствует началу использования нового оборудования (рис. 16.2).

Составим функциональное уравнение. Для этого установим зависимость между величинами, входящими в условие задачи, на двух смежных этапах. Если сохранить оборудование, возраст которого t лет, то прибыль предприятия от его использования составит прибыль на этапе N , полученную как разность $[r(t) - l(t)]$ между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками и прибылью, полученной за $N - 1$ оставшихся этапов при работе на оборудовании, возраст которого $t+1$ лет, т.е.

$$f_N(t) = r(t) - l(t) + f_{N-1}(t+1). \quad (16.6)$$

Если на этапе N оборудование, возраст которого t лет, заменить новым, то прибыль после такой замены будет состоять из прибыли, полученной как разность суммарных стоимостей $[s(t)+r(0)] - [p+l(0)]$, продукции, произведенной на оборудовании, возраст которого 0 лет, а $l(0)$ – эксплуатационные издержки, и прибыли, полученной за $N - 1$ оставшихся этапов при работе на оборудовании, возраст которого $0 + 1$ лет, т. е.

$$f_N(t) = s(t) - p + r(0) - l(0) + f_{N-1}(1). \quad (16.7)$$

Если величина прибыли (16.6) больше или равна величине прибыли (16.7), то нужно работать на старом оборудовании, в противном случае оборудование следует заменить.

Объединив (16.6) и (16.7), запишем функциональное уравнение

$$f_N(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) - l(t) + f_{N-1}(t+1) \\ s(t) - p + r(0) - l(0) + f_{N-1}(1) \end{array} \right\}, \quad (16.8)$$

где верхняя строка определяет прибыль, которая может быть получена при работе на старом оборудовании, нижняя – при его замене на новое. При этом предполагается, что переход к работе на новом оборудовании происходит за один этап. Полагая в (16.8) $N = 1$, получаем функциональное уравнение одноэтапного процесса, для которого слагаемые $f_{N-1}(t+1)$ и $f_{N-1}(1)$ не имеют смысла, и поэтому

§ 16.2. Модель замены оборудования

из уравнения исключается:

$$f_l(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) - l(t) \\ s(t) - p + r(0) - l(0) \end{array} \right\}. \quad (16.9)$$

Уравнение (16.8) и (16.9) позволяют определить величину $f_N(t)$ в зависимости от $f_{N-l}(t+1)$, где при переходе от одного этапа к другому возраст оборудования увеличивается от t до $t+1$, а число оставшихся этапов уменьшается от N до $N-1$.

Решение задачи замены оборудования

Технологическое оборудование горнообогатительного комбината эксплуатируется до полного износа. Срок его эксплуатации N составляет 10 лет. Планируемая стоимость концентрата, обогащаемого комбинатом за год $r(t)$ и затраты $l(t)$ на обслуживание технологического оборудования

Таблица 16.4

Экономические показатели эксплуатации оборудования

Год эксплуатации технологического оборудования t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Стоимость производимой продукции $r(t)$, млн грн.	20	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15
Затраты на обслуживание оборудования $l(t)$, млн грн.	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15

приведены в табл. 16.4. Стоимость нового оборудования p , которое необходимо приобрести составляет 10 млн грн. Исходя из условий задачи следует определить оптимальный срок замены технологического оборудования на горнообогатительном комбинате в течение его эксплуатационного периода.

Для получения необходимого решения вычислим максимальные значения $f_N(t)$ для $N = 1, 2, \dots, 10$ при $t = 0, 1, 2, \dots, 10$, используя данные табл. 16.4. При $N = 1$ процесс является одноэтапным, поэтому значения $f_1(t)$ находим с помощью уравнения (16.9):

$$f_1(0) = \max \left\{ \begin{array}{c} 20 - 10 \\ 0 - 10 + 20 - 10 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right\} = 10,$$

$$f_1(1) = \max \left\{ \begin{array}{c} 20 - 11 \\ 0 - 10 + 20 - 11 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 9 \\ -1 \end{array} \right\} = 9 \text{ и т. д.}$$

Результаты вычислений занесем в табл. 16.5. Величину функции $f_N(t)$ при $N \geq 2$ находим с помощью уравнения (16.8), используя при этом ранее найденные значения $f_1(t)$.

При $N = 2$ и $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ последовательно получаем

$$f_2(0) = \max \left\{ \begin{array}{c} 20 - 10 + 9 \\ 0 - 10 + 20 - 10 + 9 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 19 \\ 9 \end{array} \right\} = 19,$$

$$f_2(1) = \max \left\{ \begin{array}{c} 20 - 11 + 8 \\ 0 - 10 + 20 - 10 + 9 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 17 \\ 9 \end{array} \right\} = 17 \text{ и т. д.}$$

Для нахождения величины $f_2(t)$ необходимо найденные значения $f_1(t)$ сложить в следующем порядке

$$f_2(0) = f_1(0) + f_1(1),$$

$$f_2(1) = f_1(1) + f_1(2),$$

$$f_2(2) = f_1(2) + f_1(3) \text{ и т. д.,}$$

затем каждое полученное значение сравнить с $f_1(t)$ (в данном случае с числом 9). Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполняться условие $f_1(t) > f_2(t)$. В этот момент оборудование необходимо заменить, так как величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого оборудования. Отметим это в таблице 16.5 серым цветом.

§ 16.2. Модель замены оборудования

При $N = 3$ находим значения $f_3(t)$ в трехэтапном процессе:

$$f_3(0) = \max \left\{ \begin{array}{l} 20 - 10 + 17 \\ 0 - 10 + 20 - 10 + 9 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 27 \\ 9 \end{array} \right\} = 27,$$
$$f_3(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 20 - 11 + 15 \\ 0 - 10 + 20 - 10 + 9 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 24 \\ 9 \end{array} \right\} = 24 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, чтобы получить величину $f_3(t)$, необходимо значения $f_1(t)$ сложить со значениями $f_2(t)$ в следующем порядке:

$$\begin{aligned} f_3(0) &= f_1(0) + f_2(1), \\ f_3(1) &= f_1(1) + f_2(2), \\ f_3(2) &= f_1(2) + f_1(3) \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

затем каждое полученное значение сравнить с $f_2(t)$ (в данном случае с числом 17).

Вычисления прекращаются при выполнении условия $f_2(t) > f_3(t)$, так как в этот момент принимается решение о замене оборудования.

Обобщим полученные результаты. Начиная с двухэтапного процесса вычисления проводим в таком порядке: значения функции $f_N(t)$ определяем по формуле

$$f_{2+n}(t) = f_1(t) + f_{1+n}(t+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad t = 0, 1, 2, \dots;$$

полученные значения сравниваем соответственно со значением $f_{1+n}(1)$. Решение о замене принимаем при выполнении условия $f_{1+n}(1) > f_{2+n}(t)$. Поэтому при необходимости функциональное уравнение каждый раз можно не решать, а проводить вычисления непосредственно в табл. 16.5. Вычислим, например, по таблице значения для $f_4(t)$:

$$\begin{aligned} f_4(0) &= f_1(0) + f_3(1) = 10 + 24 = 34 > f_3(1); \\ f_4(1) &= f_1(1) + f_3(2) = 9 + 21 = 30 > f_3(1); \\ f_4(2) &= f_1(2) + f_3(3) = 8 + 18 = 26 > f_3(1). \end{aligned}$$

Таблица 16.5

Оптимальный срок эксплуатации оборудования

$f^N(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9	9	9	9	9	9
$f_3(t)$	27	24	21	18	17	17	17	17	17	17	17
$f_4(t)$	34	30	26	24	24	24	24	24	24	24	24
$f_5(t)$	40	35	32	31	30	30	30	30	30	30	30
$f_6(t)$	45	41	39	37	36	35	35	35	35	35	35
$f_7(t)$	51	48	45	43	41	41	41	41	41	41	41
$f_8(t)$	58	54	51	48	48	48	48	48	48	48	48
$f_9(t)$	64	60	56	55	54	54	54	54	54	54	54
$f_{10}(t)$	70	65	63	61	60	60	60	60	60	60	60

$$f_4(3) = f_1(3) + f_3(4) = 7 + 17 = 24 > f_3(1);$$

$$f_4(4) = f_1(4) + f_3(5) = 6 + 17 = 23 < f_3(1).$$

Отмечаем в табл. 16.5 момент замены оборудования серым цветом и переходим к вычислению значений $f^N(t)$ в пятиэтапном процессе и т. д. По условию, длина этапа совпадает с годом, поэтому решение заканчивается на десятиэтапном процессе.

По результатам вычислений, приведенных в табл. 16.5, и линии, разграничивающей области решения сохранения и замены оборудования, находим оптимальный цикл замены оборудования.

§ 16.3. Модель выбора проектов

В десятиэтапном процессе оборудование должно быть заменено на восьмом и четвертом году.

Таким образом, для получения максимальной прибыли от использования оборудования в десятилетнем процессе наиболее выгодно производить замену оборудования каждые четыре года.

Краткое повторение

- ❑ **Задача замены оборудования** – динамическая задача определения порядка и сроков замены оборудования во времени, при которых затраты на замену и обслуживание минимальны.
- ❑ **Цикл замены оборудования** – периодичность замены оборудования в планируемом периоде. Возраст эксплуатации оборудования при этом отсчитывается в прямом направлении, а этапы, на которые разбит процесс, в обратном.

§ 16.3. Модель выбора проектов

Выбор оптимального проекта

Использование динамических моделей для решения задач выбора наиболее эффективных вариантов развития производства, ставит своей целью разработку проектов распределения инвестируемых финансовых средств, между отдельными промышленными предприятиями в течение определенного периода времени. Рассмотрим это на примере задачи инвестирования в развитие предприятий по производству запасных частей легковых автомобилей. Крупная автомобильная компания,

которая занята производством легковых машин планирует увеличить выпуск запасных частей для сборки автомобилей. С этой целью, на развитие трех предприятий, которые производят запасные части в течение трех лет будет инвестировано 30 млн грн. Каждое из предприятий представляет на рассмотрение руководства компанией проекты расширения производства. Проекты отличаются один от другого величиной инвестируемых в развитие производства средств Z_i и объемом получаемой прибыли V_i . Экономические показатели

Таблица 16.6

Экономические показатели эффективности проектов

Проект	Предприятие 1		Предприятие 2		Предприятие 3	
	Z_1	V_1	Z_2	V_2	Z_3	V_3
1	0	0	0	0	0	0
2	5	25	5	15	5	20
3	10	30	10	40	–	–
4	–	–	15	45	–	–
5	–	–	20	60	10	40

эффективности реализации проектов по каждому из предприятий приведены в табл.16.6. В числе представленных проектов увеличения объема выпуска запасных частей рассмотрены и варианты с отсутствием инвестирования на развитие производства.

Решение задачи выбора проекта инвестирования в расширение выпуска запасных частей на трех предприятиях компании требует тщательного анализа всех возможных вариантов. Задача имеет $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ возможных решений, причем некоторые из них не являются допустимыми, так как требуют инвестирования свыше 30 млн грн. Для нахождения наиболее эффективного решения задачи следует вычесть разницу величины получаемой прибыли от выпуска запасных частей и затрат связанных с инвестированием в расширение

производства. Оптимальным будет допустимое решение, обеспечивающее максимальную величину получаемой прибыли.

Отметим некоторые недостатки процедуры полного перебора.

1. Каждая комбинация проекта предполагает нахождение решения *в целом*, что наиболее приемлемо для задач не большой размерности. Для задач средней и большой размерности, такого рода подход, может связан с чрезмерно большим объемом вычислений.

2. Отсутствует априорная информация о решениях, которые не являются допустимыми, что снижает эффективность вычислительной схемы полного перебора.

3. Информация, полученная в результате анализа некоторых комбинаций проектов, в дальнейшем не используется для выявления и исключения неоптимальных комбинаций.

Применение методов динамического моделирования позволяет устранить все перечисленные недостатки. Ниже будет рассмотрена сетевая модель, отвечающая условиям сформулированной задачи, и показано, что нахождение *самого длинного пути* (максимальной прибыли) между крайними узлами сети приводит к получению оптимального решения исходной задачи. Можно ожидать, что изучение динамической модели сетевой оптимизации позволит как можно лучше разобраться в особенностях рекуррентной вычислительной схемы соотношений.

Динамическая модель сетевой оптимизации

При построении динамической модели сетевой оптимизации следует определить основные этапы решения задачи. В примере задачи инвестирования в расширение производства запасных частей, финансирование проектов развития предприятий планируется осуществлять в течение трех лет. При этом требуется определить оптимальный проект инвестирования в развитие для каждого из трех предприятий. Этапы, связаны между собой посредством ограничений, на суммарный объем инвестируемых в развитие производства средств. При построении сетевой модели необходимо учесть эту связь таким образом, чтобы получить возможность поэтапного решения отдельных подзадач, не нарушая общих условий допустимости решения задачи.

Введем следующие обозначения:

x_1 = инвестируемые средства, распределяемые на этапе 1;

x_2 = инвестируемые средства, распределяемые на этапах 1 и 2;

x_3 = инвестируемые средства, распределяемые на этапах 1, 2 и 3.

Значения искомым переменных x_1, x_2 и x_3 , определяющих объем инвестируемых в расширение производства средств, лежит в пределах от 0 до 20 млн грн. Затраты на реализацию инвестиционных проектов

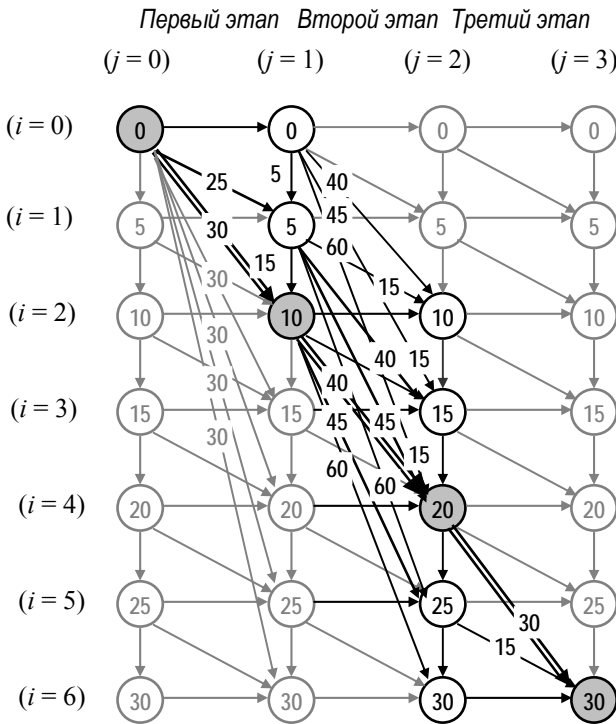


Рис. 16.3. Сетевая модель выбора проекта

определяются значениями отдельных дискретных величин: 0, 5, 10, 15, 20. Общая сумма инвестируемых средств, при этом не должна превышать 30 млн грн.

Рис. 16.3 является иллюстрацией сетевой модели выбора проекта. Каждому возможному значению инвестируемых средств x_1 , x_2 и x_3 соответствует определенный узел (объем инвестиций), ассоциированный с одним из этапов. Начальным этапом $j = 0$, который введен для удобства вычислений и трех этапов инвестирования: $j = 1$ (*первый этап*), $j = 2$ (*второй этап*) и $j = 3$ (*третий этап*). Длины дуг, соединяющие узлы на некотором этапе, с узлами на последующем этапе, численно равны величине получаемой прибыли от инвестирования в развитие производства наилучшего допустимого проекта. Рассмотрим дуги, которые соединяют узел 0 на этапе $j = 0$ с узлами $x_1 = (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30)$ на этапе $j = 1$. Дуга $(0, 0)$ (соединяющая узлы 0 на этапе $j = 0$ и узел 0 на этапе $j = 1$) соответствует случаю, когда инвестирование в развитие производства не производится. Допустимым здесь является проект 1 с $Z_{11} = 0$, и дуге $(0, 0)$ приписывается длина $V_{11} = 0$. С другой стороны, для дуги $(0, 5)$ допустимым является проект 2 с $Z_{12} = 5$ и $V_{12} = 25$. Для дуги $(0, 10)$ допустимым является проект 3 с $Z_{13} = 10$ и $V_{13} = 30$. Для других избыточных проектов первого этапа, с большим объемом инвестирования величина получаемой прибыли предполагается не большей 30 млн. грн. Значения $x_1 = (20, 25, 30)$ соответствуют возможным избыточным вариантам инвестирования.

Дуги, соединяющие узлы на этапе 1 с узлами на этапе 2, задаются узлами x_1 и x_2 . Разница величин $x_2 - x_1$ определяет возможный объем инвестируемых средств на этапе 2. Таким образом, дуга $(x_1$ и $x_2)$ является *допустимой* лишь для проектов, затраты на реализацию которых не превышают инвестируемых средств. Рассмотрим дуги, которые соединяют узлы $x_1 = (0, 5, 10)$ на этапе $j = 1$ с узлами $x_2 = (10, 15, 20, 25, 30)$ на этапе $j = 2$. Допустимыми здесь являются проекты 2 с $Z_{22} = 10$ и $V_{22} = 40$ для дуги $(0, 10)$, дуги $(5, 15)$ и дуги $(10, 20)$. Допустимым, также является проект 3 с $Z_{23} = 15$ и $V_{23} = 45$ для дуги $(0, 15)$, дуги $(5, 20)$ и дуги $(10, 25)$. Кроме того, допустимым выступает проект 4 с $Z_{24} = 20$ и $V_{23} = 60$ для дуги $(0, 20)$, дуги $(5, 25)$ и дуги $(10, 30)$. Значения $x_2 = (0, 5)$ соответствуют возможным избыточным вариантам инвестирования. Заметим также, что в случае когда $x_1 > x_2$ соответствующая дуга не существует, поскольку значение x_2 , должно быть, по меньшей мере, равно значению x_1 .

Рассмотрим свойства сетевой модели. В сетевой модели каждая дуга единственным образом связана с некоторым проектом. Целью

решения задачи является отыскание связной последовательности дуг, соединяющей узел 0 на этапе $j = 0$ с узлом $x_3 = (35)$ на этапе $j = 3$ и обладающей максимальной длиной (соответствующей наибольшей прибыли). Из определения величин x_1, x_2, x_3 следует, что любой связный путь из узла 0 на этапе $j = 0$ в узел $x_3 = (35)$ на этапе $j = 3$ соответствует допустимой комбинации проектов. Если внимательно изучить построенную сеть, то нетрудно заметить, что некоторые дуги можно отбросить как заведомо неоптимальные. Например, можно исключить дугу (0, 0) на этапе $j = 1$, а соответственно с этим дугу (0, 10), дугу (0, 15) и дугу (0, 20) на этапе $j = 2$. Также можно исключить дугу (10, 30) на этапе $j = 2$. Максимальная величина получаемой прибыли в соответствии с комбинацией этих проектов будет равна 90 млн грн. Исключение неоптимальных дуг значительно уменьшает объем необходимых вычислений.

После того как сеть построена, найдем самый длинный путь от узла 0 на этапе $j = 0$ до узла $x_3 = (35)$ на этапе $j = 3$. Для этого обозначим через $f_j(x_j)$ величину самого длинного пути, ведущего в узел x_j на этапе j . Поскольку $j = 0$ – исходный этап, $f_0(0) = 0$. Далее вычисления производятся поэтапно.

Этап первый. Так как узел 0 на этапе $j = 0$ с каждым из семи узлов $x_1 = (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30)$ на этапе $j = 1$ соединяют три дуги, то самый длинный путь до узла x_1 определяется по формуле

$$f_1(x_1) = f_0(0) + V_1(0, x_1), \quad (16.10)$$

где $V_1(0, x_1)$ – длина (прибыль) дуги (0, x_1). В результате получим

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 0 + 0 = 0, \\ f_1(5) &= 0 + 25 = 25, \\ f_1(10) &= 0 + 30 = 30, \\ f_1(15) &= 0 + 30 = 30, \\ f_1(20) &= 0 + 30 = 30, \\ f_1(25) &= 0 + 30 = 30, \\ f_1(30) &= 0 + 30 = 30. \end{aligned}$$

Этап второй. На этом этапе вычисляются величины самых длинных путей до всех узлов $x_2 = (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30)$. В отличие от этапа $j = 1$ количество дуг, входящих в один из узлов на этапе $j = 2$

§ 16.3. Модель выбора проектов

самого длинного пути производится по следующему методу

$$\left[\begin{array}{l} \text{Величина} \\ \text{самого} \\ \text{длинного} \\ \text{пути до} \\ \text{узла } x_2 \end{array} \right] = \max_{\text{по допустимым} \\ \text{дугам } (x_1, x_2)} \left\{ \left[\begin{array}{l} \text{Величина} \\ \text{самого} \\ \text{длинного} \\ \text{пути до} \\ \text{узла } x_1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Длина} \\ \text{дуги} \\ (x_1, x_2) \end{array} \right] \right\}.$$

Запишем это равенство в математическом виде

$$f_2(x_2) = \max_{\text{по допустимым} \\ \text{дугам } (x_1, x_2)} \{ f_1(x_1) + V_2(x_1, x_2) \}. \quad (16.11)$$

Ниже приведены результаты вычислений по данной формуле (16.11). Числа, набранные жирным шрифтом, указывают значения расстояния на самом длинном пути до соответствующего узла. Эти числа несут необходимую информацию для проведения вычислений на этапе 2.

$$\begin{aligned} f_2(0) &= \max \{0 + 0\} = \mathbf{0}, \\ f_2(5) &= \max \{0 + 15\} = \mathbf{25}, \\ f_2(10) &= \max \{0 + 40\} = \mathbf{40}, \\ f_2(15) &= \max \{0 + 45; \mathbf{25} + 40\} = \mathbf{65}, \\ f_2(20) &= \max \{0 + 60; \mathbf{25} + 45; \mathbf{30} + 40\} = \mathbf{70}, \\ f_2(25) &= \max \{\mathbf{25} + 60; 30 + 45\} = \mathbf{85}, \\ f_2(30) &= \max \{30 + 60\} = \mathbf{90}. \end{aligned}$$

Этап третий. По аналогии с этапом 2 соотношения, определяющие самый длинный путь $f_3(x_3)$ до узла x_3 запишем в следующем виде:

$$f_3(x_3) = \max_{\text{по допустимым} \\ \text{дугам } (x_2, x_3)} \{ f_2(x_2) + V_3(x_2, x_3) \}. \quad (16.12)$$

В результате вычислений по приведенной выше формуле находим максимальные значения длины пути на этапе 3.

$$f_3(30) = \max \{30 + 40 + 40\} = \mathbf{110}.$$

Найденное решение является оптимальным. Оптимальный путь при этом пролегает по наиболее длинной дуге (0, 10), (10, 20), (20, 30). Оптимальная комбинация проектов инвестирования составляет (3, 3, 5). Этому решению, соответствует величина получаемой прибыли f_3 в размере 110 млн грн.

Рекуррентность соотношений динамической модели

Поиск оптимального решения динамической задачи с помощью методов сетевого моделирования требует проведения ряда сложных вычислений. При этом информация, которая получена на предшествующих этапах, для принятия оптимизационных решений в последующем не используется. Все решения находятся *оптимальным* образом независимо от результатов, которые получены ранее. Одним из важнейших при построении сетевой модели, является определения величины x_j , что дает возможность автоматически выводить из рассмотрения недопустимые проекты (дуги). В отличие от этого использование рекуррентных соотношений при решении задач динамического моделирования позволяет значительно упростить процесс вычислений, так как предполагает возможность нахождения оптимального решения на основе ранее полученных данных. Если воспользоваться обозначениями, введенными при рассмотрении сетевой модели, можно записать рекуррентное соотношение в следующем виде:

$$f_j(x_j) = \max_{\substack{\text{по допустимым} \\ \text{проектам } k_j}} \{V_j(k_j) + f_{j-1}(x_{j-1})\}, \quad (16.13)$$

где $f_0(x_0) = 0$ по определению. Приведенное равенство (16.13) является *рекуррентным*, так как величина $f_j(x_j)$ на этапе j вычисляется по известному значению $f_{j-1}(x_{j-1})$ на этапе $j-1$ при $f_0(x_0) = 0$.

Чтобы представить рекуррентное соотношение в корректной математической форме, необходимо внести две требуемые поправки, которые могут устранить некоторые различия между динамической и сетевой моделью для рассматриваемой задачи.

Во-первых, следует отметить, что $f_j(x_j)$ является функцией единственного аргумента x_j . Отсюда следует, что правая часть рекуррентного соотношения должна быть выражена через x_j , а не

§ 16.3. Модель выбора проектов

через x_{j-1} . В сетевой модели разность значений x_j и x_{j-1} равна величине инвестируемых средств Z_j на реализацию проекта k_j на этапе j , т. е. $Z_j(k_j) = x_j - x_{j-1}$. Теперь можно выразить x_{j-1} через x_j

$$x_{j-1} = x_j - Z_j(k_j) \quad (16.14)$$

с помощью равенства (16.14). Такая замена обеспечит более корректную математическую запись рекуррентных соотношений.

Во-вторых, необходимо представить в математической форме условие, предусматривающее рассмотрение только допустимых проектов. Как и в случае с сетевой моделью, можно воспользоваться равенством (16.14). Однако это ограничение уже было введено выше путем замены $x_{j-1} = x_j - c_j(k_j)$ в функции $f_{j-1}(x_{j-1})$. Чтобы обеспечить необходимую корректность, следует в явном виде учесть не требующие пояснений неравенства $x_{j-1} \geq 0$, откуда $x_j - c_j(k_j) \geq 0$ или $c_j(k_j) \leq x_j$. Таким образом, рекуррентные соотношения динамической модели имеют следующий вид:

$$f_j(x_j) = \max_{c_j(k_j) \leq x_j} \{ V_j(k_j) + f_{j-1}(x_j - Z(k_j)) \}. \quad (16.15)$$

В таблицах приводятся результаты поэтапных расчетов на основе рекуррентного соотношения для рассматриваемой задачи.

Этап 1

Таблица 16.7

x	$V_1(k_1)$			Оптимальное решение	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$f_1(x_1)$	k_1^*
0	0	—	—	0	1
5	0	25	—	25	2
10	0	25	30	30	3
15	0	25	30	30	3
20	0	25	30	30	3
25	0	25	30	30	3
30	0	25	30	30	3

Этап 2

Таблица 16.8

x_2	$V_2(k_2) + f_1(x_2 - c_2(k_2))$					Оптимальное решение	
	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$	$k_2 = 5$	$f_2(x_2)$	k_2^*
0	0+0=0	—	—	—	—	0	1
5	0+25=25	15+0=15	—	—	—	25	1
10	0+30=30	15+25=40	40+0=40	—	—	40	2 или 3
15	0+30=30	15+30=45	40+25=65	45+0=45	—	65	3
20	0+30=30	15+30=45	40+30=70	45+25=70	60+0=60	70	3 или 4
25	0+30=30	15+30=45	40+30=70	45+30=70	60+25=85	85	5
30	0+30=30	15+30=45	40+30=70	45+30=70	60+30=90	90	5

Этап 3

Таблица 16.9

x_3	$V_3(k_3) + f_2(x_3 - c_3(k_3))$			Оптимальное решение	
	$k_3 = 1$	$k_3 = 2$	$k_3 = 3$	$f_3(x_3)$	k_3^*
20	0+70=70	—	—	70	1
25	0+85=85	20+70=90	—	90	2
30	0+90=80	20+85=105	40+70=110	110	3

Анализируя результаты расчетов, следует придерживаться таких рекомендаций: сравнивать табличные данные с результатами расчетов сетевых моделей; связывать табличные данные с соответствующими математическими символами в рекуррентных соотношениях.

Краткое повторение

☐ **Модель выбора проектов** – модель выбора проектов распределения инвестируемых финан-

§ 16.3. Модель выбора проектов

совых средств, между отдельными промышленными предприятиями в течение определенного периода времени.

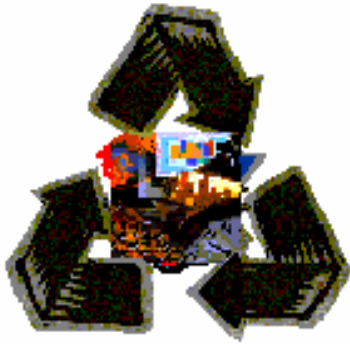
- ❑ **Рекуррентность соотношений** – соотношение функциональных зависимостей расчетных величин динамической модели, позволяющие свести проведение сложных вычислений, к выполнению ряда отдельных расчетов.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ	
выбор оптимального проекта замена оборудования запуск партий деталей	метод последовательного анализа метод рекуррентных соотношений цикл замены оборудования

Контрольные вопросы и задания



1. Специфика динамического моделирования.
2. Модель запуска партий деталей.
3. Задача запуска партий деталей.
4. Моделирование замены оборудования.
5. Формализация модели замены оборудования.
6. Решение задачи замены оборудования.
7. Модель выбора проектов.
8. Динамическая модель сетевой оптимизации.
9. Рекуррентность соотношений в динамической модели.



Раздел IX

Модели управления запасами и массового обслуживания

✓ Глава 17 *Модели управления запасами*

- § 17.1. Общая модель управления запасами
- § 17.2. Оптимизация текущих запасов
- § 17.3. Оптимизация страховых запасов

✓ Глава 18 *Модели массового обслуживания*

- § 18.1. Особенности формализации моделей
- § 18.2. Постановка задач массового обслуживания
- § 18.3. Решение задач массового обслуживания

Глава

17

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

В этой главе дана общая модель управления запасами. Рассмотрены основные элементы этой модели. Показана стратегия управления запасами. Представлены модели оптимизации текущих запасов и страховых запасов. Сделаны необходимые расчеты, проанализированы результаты решения задач управления запасами.

§ 17.1. Общая модель управления запасами

Проблема управления запасами

Для организации бесперебойной и ритмичной работы предприятий в условиях современного промышленного производства необходимо обеспечить их требуемым количеством сырья и материалов. Создание минимально необходимого уровня производственных запасов является неременным условием обеспечения работы предприятия при наименьших затратах.

Объем производственных запасов измеряется в абсолютных и относительных величинах. Абсолютная величина запаса определяется в натуральных единицах измерения (тоннах, килограммах, погонных и кубических метрах, штуках и т. п.). В относительных величинах объем запаса измеряется обеспечиваемым им количеством дней производственного потребления соответствующего вида материала.

Производственные запасы подразделяются на подготовительные, текущие и страховые части. В некоторых случаях производственный запас может формироваться в виде сезонного запаса состоящего из тех же составных частей.

Подготовительный запас необходим на время подготовки поступающих на предприятие материалов к использованию в процессе

производства. Если для этого не требуется выполнения специальных операций по предварительной технологической обработке материалов, подготовительный запас принимается равным одному дню. При проведении специальных подготовительных операциях, величина запаса определяется исходя из минимальной продолжительности времени выполнения операции в соответствии с технологией и порядком их выполнения.

Текущий запас предназначается для обеспечения бесперебойной работы производства в период между двумя очередными поставками. По всем разновидностям сырья и материалов, которые поставляются в одни и те же сроки, объем текущих запасов должен быть равен количеству дней между поставками. В остальных случаях, когда сырье и материалы поставляются в различные сроки, минимальный и максимальный объемы текущих запасов принимается равным – средней величине текущего запаса, т. е. половине требуемого объема в интервале между поставками.

Страховой запас предназначен для бесперебойного обеспечения производства сырьем и материалами при отклонениях от принятых интервалов поставок. Это связано с правом поставщика отгружать материалы потребителю в любом количестве (в пределах, обусловленных заказом или договором) и в любой день установленного заказом периода поставок (месяца), а также с возможными нарушениями по непредвиденным обстоятельствам сроков поставок и доставки по вине поставщиков и транспорта.

Необходимость надежного обеспечения предприятий сырьем и материалами часто обуславливает чрезмерное увеличение объемов страховых запасов, что приводит к временному исключению значительных сумм оборотных средств. Такого рода перестраховки, не способствуют повышению эффективности работы предприятия, а только могут в значительной мере осложнить, не без того трудную экономическую ситуацию. При необоснованном сокращении размеров запасов (например, вследствие нарушения сроков и объемов поставок) возможна частичная или полная остановка производства. Срыв поставок и применяемые при этом экономические санкции в отношении поставщиков, не могут целиком компенсировать убытки, которые несет предприятие из-за остановки производства.

**Элементы
модели
управления
запасами**

Задача управления запасами возникает тогда, когда необходимо создать запас сырья и материалов для удовлетворения потребности в них на заданном интервале времени. Для решения этой задачи требуется определить количество поставляемого сырья и материалов и сроки их получения. Спрос на них может быть удовлетворен путем однократного создания запаса на весь рассматриваемый период времени или посредством создания запасов на отдельные периоды. Эти два случая соответствуют как избытку запасу сырья и материалов по отношению к их производственной потребности, так и их дефициту.

При избытке запасов сырья и материалов увеличиваются затраты на их приобретение и хранение, а периодичность размещения заказов уменьшается, дефицит возникает реже, простой производства при этом сокращаются. С другой стороны, при недостаточном запасе затраты на приобретение и хранение сырья и материалов снижаются, но частота размещения заказов и риск дефицита возрастают, простой оборудования во многом увеличивается. Для любого из этих крайних случаев характерны значительные экономические потери. Таким образом, решения относительно количества поставляемого сырья и материалов, сроков их поставок могут основываться на минимизации суммарных затрат, вызванных потерями как от избытка запасов, так и их дефицита. В этой связи, суммарные затраты выраженные в виде отдельных слагаемых, могут быть представлены следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Суммарные} \\ \text{затраты} \\ \text{управления} \\ \text{запасами} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Затраты} \\ \text{на} \\ \text{покупку} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Затраты} \\ \text{на} \\ \text{оформление} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Затраты} \\ \text{на} \\ \text{хранение} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Потери} \\ \text{от} \\ \text{дефицита} \end{array} \right) .$$

Затраты на покупку приобретают очень важное значение когда цена единицы продукции зависит от размера закупаемой партии. Это, обычно выражается в виде оптовых скидок в тех случаях, когда цена единицы продукции убывает с возрастанием размера заказа.

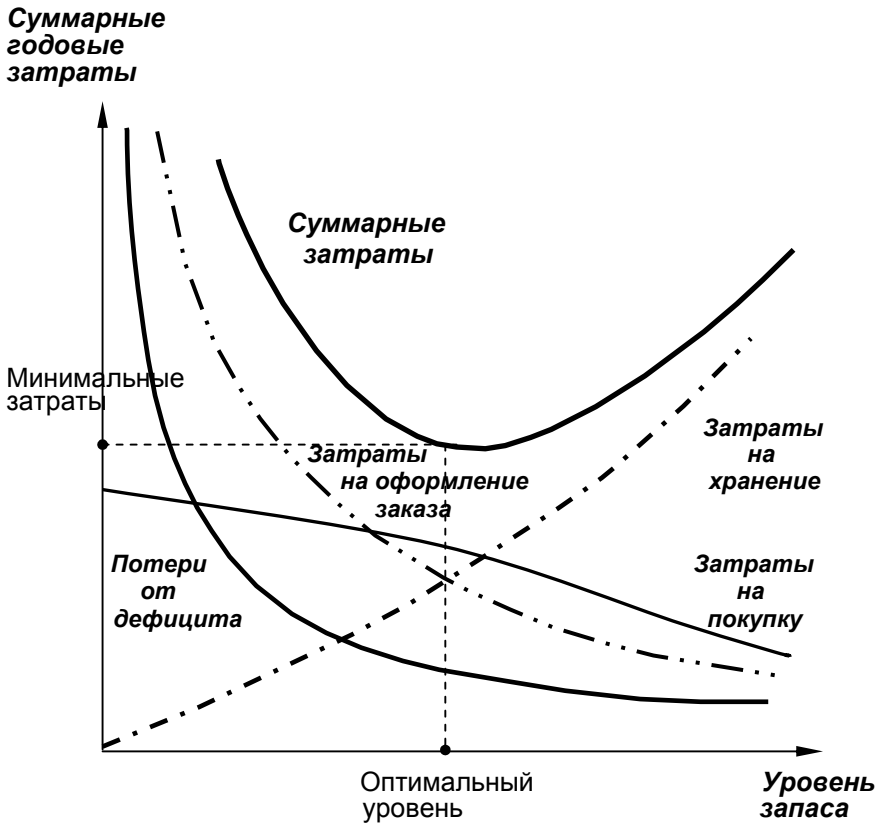


Рис. 17.1. График зависимостей отдельных затрат

Затраты на оформление закупаемой партии представляют собой постоянные расходы, связанные с размещением заказа. Если в течение определенного периода времени спрос на сырье и материалы удовлетворяется путем размещения более мелких заказов (более часто), то затраты будут возрастать, по сравнению с тем, когда спрос удовлетворяется посредством размещения более крупных заказов.

Затраты на хранение запаса представляют собой расходы на содержание запаса на складе. Эти расходы возрастают с ростом

§ 17.1. Общая модель управления запасами

объемов запасов, увеличением проведения складских операций по перемещению и складированию сырья и материалов, выполнением погрузочно-разгрузочных работ.

Потери от дефицита представляют собой потерю прибыли из-за простоя производственного оборудования, вследствие отсутствия необходимого количества сырья и материалов. Учитываются также потери рабочего времени, связанные с переналадкой оборудования из-за использования других видов сырья и материалов.

График на рис. 17.1 иллюстрирует зависимость отдельных затрат обобщенной модели управления запасами от уровня затрат. Оптимальный уровень запаса соответствует минимуму суммарных затрат. Отметим, что модель управления запасами не обязательно должна включать названные затраты, так как некоторые из них могут быть незначительными. На практике при построении модели в случае необходимости, какую-либо из затрат можно не учитывать, при условии, что она не составляет существенную часть общих затрат.

Стратегия управления запасами

Стратегия управления запасами заключается в установлении величины и сроков поставок сырья, восполнении требуемых материалов их распределения между цехами и участками. Свод общеустановленных правил, на основе которых принимаются эти решения, называется стратегией управления запасами. Каждая такая стратегия, связана с определенными затратами на поставку сырья и материалов промышленным предприятиям. Стратегия, которая позволяет минимизировать общие затраты называется оптимальной. Нахождение оптимальной стратегии является основной задачей управления запасами.

Математическая формализация задачи о нахождении оптимальной стратегии существенно зависит от исследуемой ситуации. Однако единство учитываемых факторов позволяет говорить об общности моделей управления запасами. При сравнении стратегий управления запасами учитываются только переменные, которые составляют функции затрат, определяемые выбором стратегии.

В зависимости от особенности задачи управления запасов могут быть рассмотрены следующие возможные варианты выбора отдельных составляющих функции затрат:

Затраты на хранение:

- пропорциональны среднему уровню объема хранения запаса;
- пропорциональны величине остатка хранения запаса;
- пропорциональны величине объема максимального запаса;
- заданы в виде нелинейной функции одного из указанных качеств.

Затраты на покупку:

- пропорциональны объему поставки;
- постоянны независимо от объема поставки;
- пропорциональны приросту интенсивности производства;
- фиксированы в зависимости от перечня номенклатуры в заявке.

Затраты на оформление заказа:

- пропорциональны объему заказа;
- постоянны не зависимо от объема заказа;
- пропорциональны количеству производимых заказов;
- фиксированы в зависимости от перечня номенклатуры заказов.

Опыт решения задач управления запасами показывает, что значение целевой функции в окрестности оптимума изменяется очень медленно. В сочетании с неизбежной погрешностью исходных данных это оправдывает приближенные значения параметров задачи и отдельных допущений, которые приходится делать для получения необходимого решения.

Ограничения в задачах управления запасами могут быть различного характера. Рассмотрим некоторые из видов ограничений:

- по максимальному объему (весу, стоимости) запасов;
- по величине средней стоимости;
- по количеству поставок в заданном интервале времени;
- по максимальному объему (весу, стоимости) поставки или кратности этого объема некоторой минимальной величине;
- по проценту требований, удовлетворенных из наличного запаса.

Стратегия управления запасами, т. е. свод установленных правил определения сроков и объема заказа, в приложениях обычно считается

§ 17.1. Общая модель управления запасами

известной величиной, и задача сводится к определению нескольких констант (параметров стратегии). Сложность нахождения оптимальных параметров значительно возрастает с введением каждого нового ограничения. Поэтому имеет смысл сначала решить задачу без ограничений и, получив решение, проверить существенность каждого из них. Далее нужно последовательно вводить эти ограничения, начиная с имеющих наибольшую относительную жесткость.

Краткое повторение

- ❑ **Подготовительный запас** – запас, который необходим на время подготовки, поступающих на предприятие материалов к использованию в процессе производства.
- ❑ **Текущий запас** – запас, который предназначен для обеспечения бесперебойной работы производства в период между двумя очередными поставками.
- ❑ **Страховой запас** – запас, который предназначен для бесперебойного обеспечения производства сырьем и материалами при отклонениях от принятых интервалах поставок.
- ❑ **Суммарные затраты управления запасами** – затраты, которые включают в себя: затраты на покупку сырья и материалов; затраты на оформление закупаемой партии; затраты на хранение и потери от дефицита из-за простоя производства.
- ❑ **Стратегия управления запасами** – свод общеустановленных правил, на основе которых принимаются решения относительно объемов и сроков поставок.

§ 17.2. Оптимизация текущих запасов

Особенности постановки задачи

Текущие запасы – это запасы сырья и материалов предназначенные для обеспечения бесперебойной и ритмичной работы цехов предприятия в период между двумя поставками. В условиях, когда объем и сроки поставок не меняются в течение длительного периода времени, объем текущих запасов y принимается равным произведению величины дневной потребности p , умноженной на продолжительность периода поставки T .

$$y = pT. \quad (17.1)$$

Модель задачи оптимизации текущих запасов простейшего типа характеризуется постоянной величиной дневной потребности p , мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита.

Уровень запаса

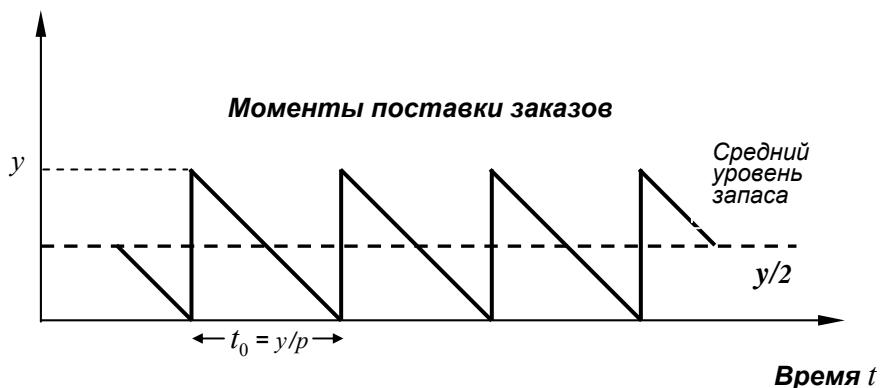


Рис. 17.2. График уровня текущих запасов

На рис.17.2 показано изменение уровня текущего запаса во времени. Наивысшего уровня текущий запас достигает в момент

§ 17.2. Оптимизация текущих запасов

поставки заказа размером u . Уровень текущего запаса достигает нуля в конце периода T после получения заказа размером u .

Чем меньше размер заказа u , тем чаще нужно размещать новый заказ. Однако при этом средний уровень запаса будет уменьшаться. С другой стороны, с увеличением размера заказа уровень запаса

Уровень запаса

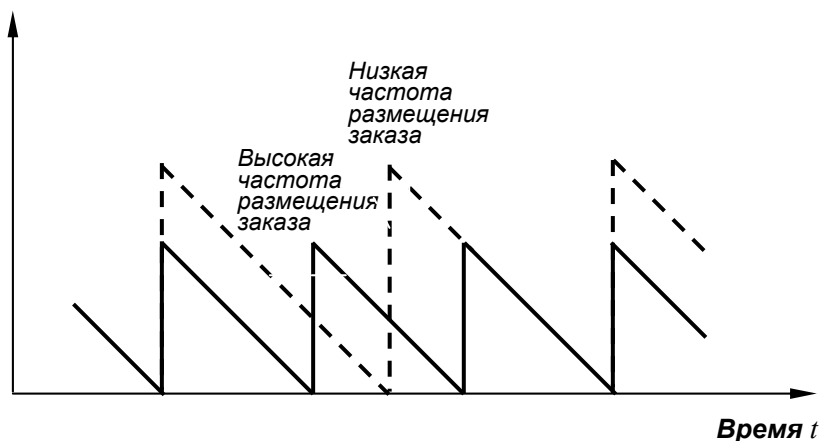


Рис. 17.3. График частоты размещения заказов

повышается, но заказ размещается реже (рис. 17.3). Так как общая величина затраты зависит от частоты размещения заказа и объема хранимого запаса, то величина u выбирается из условия обеспечения сбалансированности между двумя этими видами затрат. Данное положение и лежит в основе построения модели оптимизации текущих запасов в промышленном производстве.

Для построения экономико-математической модели оптимизации текущих запасов сырья и материалов на предприятии необходимо ввести некоторые дополнительные обозначения. Пусть Q_y – это затраты на оформление заказа величиной u , а E_y – это затраты на хранение единицы этого заказа u в единицу времени. Исходя из того, что затраты на оформление заказа в единицу времени $Z_{оф}$

составляют:

$$Z_{\text{оф}} = \frac{Q_y}{y/p}; \quad (17.2)$$

а затраты на хранение запаса Z_{xp} в единицу времени:

$$Z_{\text{xp}} = E_y \frac{y}{2}; \quad (17.3)$$

то суммарные затраты $Z_{\text{сум}} = Z_{\text{оф}} + Z_{\text{xp}}$ при этом, будут равны:

$$Z_{\text{сум}} = \frac{Q_y}{y/p} + E_y \frac{y}{2}. \quad (17.4)$$

Для получения оптимального значения размера заказа y необходимо продифференцировать значение функции $Z_{\text{сум}}$ и приравнять его к нулю

$$\frac{dZ_{\text{сум}}(y)}{dy} = \frac{Q_y}{y/p} + E_y \frac{y}{2} = 0. \quad (17.5)$$

Откуда оптимальное значение размера заказа определяется формулой:

$$y^* = \sqrt{\frac{2Q_y p}{E_y}}. \quad (17.6)$$

Полученную формулу (17.6) оптимального размера заказа обычно называют формулой экономического размера закона Уилсона.

В большинстве реальных ситуаций существует (положительный) **срок выполнения** заказа (время запаздывания) $L_{\text{зан}}$ от момента размещения заказов до его действительной постановки. Стратегия размещения заказов в приведенной модели должна определить **точку**

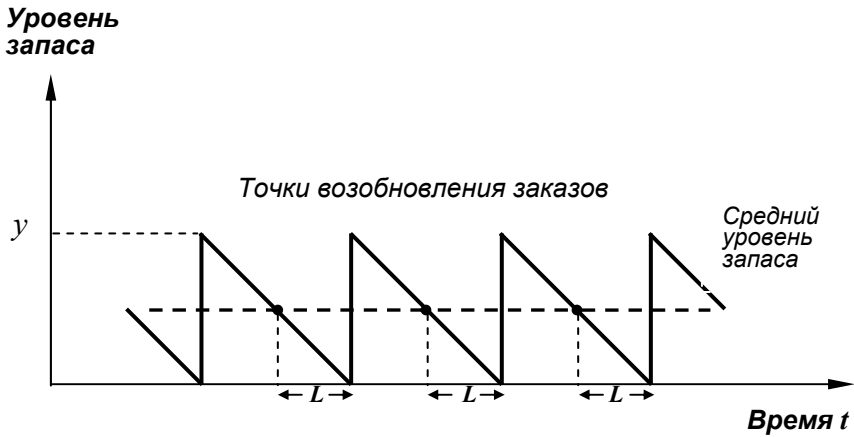


Рис. 17.4. График возобновления заказов

возобновления заказа. На рис. 17.4 иллюстрируется случай, когда точка возобновления заказа должна опережать на L единиц времени ожидаемую поставку. На практике точку возобновления заказа можно определить через уровень запаса, соответствующий моменту возобновления заказа. Это предполагает необходимость постоянного контроля уровня запаса до момента достижения очередной точки возобновления заказа. Не редко в связи с этим, модель оптимизации текущих запасов называют еще моделью непрерывного контроля состояния заказов.

**Задача
оптимизации
текущих
запасов**

Для работы установки производящей бензин на минизаводе необходимо ежедневно 100 т газового конденсата. Затраты на размещение заказа на поставку газового конденсата составляют 500 грн. Стоимость хранения 1 т газового конденсата в сутки составляет 0,1 грн.

Исходя из условий задачи, необходимо определить оптимальный размер поставляемой партии газового конденсата и точку заказа при сроке выполнения заказа 12 дней.

На основе приведенных выше формул определим оптимальный размер партии поставки газового конденсата

$$y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 500 \cdot 100}{0,1}} = 1000 \text{ т.}$$

Соответственно оптимальная продолжительность цикла составляет

$$t_0^* = 1000/100 = 10 \text{ дней.}$$

Так как срок выполнения заказа равен 12 дням, а продолжительность цикла составляет 10 дней, возобновление заказа необходимо осуществлять тогда, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения спроса в течение $12 - t_0^* = 2$ двух дней. Таким образом, заказ на поставку газового конденсата размером $y^* = 1000$ т, следует размещать тогда, когда уровень запаса достигает величины двухдневной потребности 200 т.

Краткое повторение

- ❑ **Формула Уилсона** – формула определения оптимального объема поставляемой партии заказа сырья и материалов.
- ❑ **Срок выполнения заказа** – момент времени от размещения заказа на поставку сырья и материалов до их поставки на предприятия.
- ❑ **Точка возобновления заказа** – точка на графике, показывающая момент времени, когда следует возобновить заказ на поставку сырья и материалов на предприятия.

§ 17.3. Оптимизация страховых запасов

Величина страховых запасов

Страховой запас представляет собой специально создаваемый резервный запас ресурсов (сырья, материалов, комплектующих, деталей, топлива, воды), предназначенный для обеспечения бесперебойной и ритмичной работы предприятий в случае возникновения перебоев в поставках. Размер страхового запаса определяется колебанием объемов поставок, несвоевременностью отгрузки, сезонностью спроса на продукцию, задержками транспорта в пути при доставке сырья и материалов.

Эффективность работы промышленного предприятия в этих условиях во многом будет определяться величиной и своевременностью поставок. Всякого рода возможные отклонения в поставках будут вести к тому, что в одни моменты времени предприятие будет нести потери связанные с простоем технологического оборудования из-за дефицита сырья, в другие моменты времени потери, из-за избытка сырья связанные с его хранением на складе. Вполне очевидно, что общие потери производства $L_{общ}$, из-за не рациональности величины страхового запаса будут в себя включать: потери от хранения сырья L_{xp} и потери от дефицита $L_{деф}$

$$L_{общ} = L_{xp} + L_{деф}. \quad (17.7)$$

Рассмотрим влияние потерь от хранения и дефицита на величину общих потерь. При постепенном росте величины страховых запасов издержки от дефицита будут снижаться, а издержки хранения возрастать. В какой-то момент, страховые запасы достигнут некоторой придельной величины $Z_{пр}^c$, при которой исключается возможность возникновения дефицита, и издержки дефицита станут практически невозможными. Если же, напротив, постепенно уменьшать величину страховых запасов, то будут расти издержки дефицита, а издержки хранения сокращаться. Когда страховые запасы полностью расходуются, то издержки дефицита достигнут своего максимума. В этой связи, сумма величины общих потерь $L_{общ}$ будет варьировать от нуля, до некоторого максимального значения. Если удельные потери от хранения и дефицита могут быть

соизмеримы в едином масштабе числовых величин, то, вполне очевидно, что где-то между этими двумя крайними значениями страховых запасов находится такое значение Z_{opt}^c , при котором сумма издержек $L_{общ}$ достигает минимума. Это значение и будет оптимальным.

Когда величина поставки соответствует дневному потреблению, дефицит сырья и материалов не возникает, и необходимость в страховых запасах отсутствует. Если же имеет место не соответствие объемов и моментов поставок производственным потребностям, то эти отклонения от запланированных необходимо учитывать при определении величины страховых запасов. Для нахождения оптимальной величины страховых запасов следует изучить статистические характеристики объемов и последовательности поставок за ряд временных периодов.

В связи с этим введем понятие функции дефицита, которая может быть представлена в следующем виде

$$y_k = \sum_{i=1}^k p_k + \sum_{i=1}^k s_k - \sum_{i=1}^k d_k, \quad (17.8)$$

где k – день потребления;

p_k – объем поставки сырья и материалов на предприятие в день k ;

s_k – величина страхового запаса сырья и материалов в день k ;

d_k – потребность предприятия в сырье и материалах в день k .

Критерий оптимальности величины страховых запасов при этом будет представлен в виде функции минимизируемых общих затрат

$$\sum_{i=1}^k s_k z^s - \sum_{i=1}^k d_k z^d \rightarrow \min, \quad (17.9)$$

где z^s – удельные затраты на хранение единицы сырья;

z^d – удельные потери от дефицита единицы сырья.

Так как объемы и интервалы поставок сырья и материалов – величины случайные, то и дефицит y_k , также является случайной величиной. Эта случайная величина подчинена закону нормального распределения. Следовательно, зная среднеарифметическое значение дефицита y и среднеквадратическое его отклонение от среднего

§ 17.3. Оптимизация страховых запасов

значения σ_y можно определить оптимальные страховые запасы:

$$s_k^{opt} = \bar{y} + u\sigma_y, \quad (17.10)$$

где u – квантиль нормального распределения. Для того, чтобы определить величину u , рассчитывают коэффициент гарантии, или доверия, μ :

$$\mu = \frac{z^d}{z^d - z^s}. \quad (17.11)$$

Величина μ характеризует вероятность того, что дефицит не превысит величину оптимального страхового запаса s_k^{opt} . Квантиль u представляет собой нормированную величину отклонения от \bar{y} для которой риск не превышает $(1 - \mu)$. Величина квантиля u определяется по специальным таблицам для закона нормального распределения случайной величины. По таблице нормального распределения нормированной случайной величины $P = 0,99$ соответствует $u = 2,33$.

Для нахождения u , σ_y необходимо знать величину и последовательность поставок за достаточно длительный период времени. Чем продолжительнее взятый период времени, тем точнее будут полученные результаты расчетов.

Задача оптимизации страховых запасов

Предприятие – производитель аккумуляторов для легковых автомобилей ежедневно потребляет 10 т свинца. Выплавка свинцовых пластин аккумуляторных батарей производится в литейном цехе предприятия. Поставки партий свинца на предприятие осуществляются не в одинаковых объемах и не регулярно. Уменьшение объемов поставок на одну тонну, и как следствие этого, уменьшение выпуска продукции ведет к потерям прибыли из-за дефицита свинца в размере 10 тыс. грн. Хранение одной тонны свинца на складе в течение суток обходится предприятию в 10 грн. В задаче необходимо, исходя из объемов и последовательности поставок партий свинца на предприятие, определить оптимальный объем страховых запасов, позволяющий минимизировать потери от дефицита и хранения на складе.

Сведения об объемах и последовательности поставок отдельных партий свинца на предприятие представлены в табл. 17.1. Таблица содержит данные по трем последовательностям поставок, величине страхового запаса, дневной потребности и дефициту свинца. При этом, первоначально величина страховых запасов в расчетах при-

Таблица 17.1

Объем и последовательность поставок партий свинца

День i	Первая последовательность поставок				Вторая последовательность поставок				Третья последовательность поставок			
	p_k'	s_k'	d_k'	y_k'	p_k''	s_k''	d_k''	y_k''	p_k'''	s_k'''	d_k'''	y_k'''
1	5	0	10	5	0	0	10	10	40	0	10	---
2	0	0	10	15	0	0	10	20	0	30	10	---
3	20	0	10	5	0	0	10	30	0	20	10	---
4	0	0	10	15	30	0	10	10	0	10	10	0
5	10	0	10	15	10	0	10	10	0	0	10	10
6	0	0	10	25	10	0	10	10	30	0	10	---
7	40	0	10	---	20	0	10	0	0	10	10	0
8	0	5	10	5	30	0	10	---	20	0	10	---
9	25	0	10	---	0	20	10	---	10	10	10	---
10	0	10	10	0	0	10	10	0	0	10	10	0
Всего	100	15	100	85	100	30	100	90	100	90	100	10

нимается равной нулю. Дневная величина дефицита свинца y_k' для первой последовательности поставок определяется путем суммирования объема дневной поставки p_k' и величины страхового запаса s_k' , за вычетом дневной потребности d_k' . Аналогично вычисляется величина дефицита для второй и третьей последовательности поставок. Если эта сумма, превышает дневную потребность $p_k' + s_k' - d_k' > 0$, то в строке i графы дефицита ставится прочерк, а остаток записывается в графе страхового запаса $i + 1$ дня. Так в 7

§ 17.3. Оптимизация страховых запасов

и 9 день первой последовательности поставок, 8 и 9 день второй последовательности поставок, а так же 1, 2, 3, 6, 8, 9 день третьей последовательности поставок, величина остатка превышает дневную потребность. Эти дни в дальнейший расчет не принимаются.

Определим статистические характеристики дефицита поставок свинца на предприятие. Дефицит возникает в четырнадцать случаях. Для этого, вначале найдем среднеарифметическое значение дефицита:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}; \quad (17.12)$$

$$\bar{y} = \frac{85 + 90 + 10}{14} = 13,2 \text{ т.}$$

После чего, определим среднеквадратическое отклонение от среднего значения:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)^2}{n-1}}; \quad (17.13)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{730,36}{14-1}} \approx 7,5 \text{ т.}$$

Найдя значения \bar{y} и σ_y , определим оптимальный страховой запаса:

$$s_k^{opt} = \bar{y} + u \sigma_y; \quad (17.14)$$

$$s_k^{opt} = 13,2 + 2,33 \cdot 7,5 \approx 30,7 \text{ т.}$$

Что соответствует

$$t_d = \frac{s_k^{opt}}{d_k}; \quad (17.15)$$

$$t_d = \frac{30,7}{10} = 3,07 \text{ дням потребления.}$$

Определим общую величину потерь от хранения и дефицита:

$$L_{\text{общ}} = 10 \cdot (15 + 30 + 90) + 10000 \cdot (85 + 90 + 10) = 1851350 \text{ грн.}$$

Эти потери составляют 1851350 грн. Из них 1350 грн. или 0,07 % всех издержек составляют потери от хранения и 1850000 грн. или 99,03 % составляют потери от дефицита. Вполне очевидно, что

Таблица 17.2

Потери от хранения и дефицита поставок партий свинца

День <i>i</i>	Первая последовательность поставок				Вторая последовательность поставок				Третья последовательность поставок			
	p_k'	s_k'	d_k'	y_k'	p_k''	s_k''	d_k''	y_k''	p_k'''	s_k'''	d_k'''	y_k'''
1	5	10	10	---	0	10	10	0	40	10	10	---
2	0	5	10	5	0	0	10	10	0	40	10	---
3	20	0	10	---	0	0	10	20	0	30	10	---
4	0	5	10	5	30	0	10	0	0	20	10	---
5	10	0	10	5	10	0	10	0	0	10	10	0
6	0	0	10	15	10	0	10	0	30	0	10	---
7	40	0	10	---	20	0	10	---	0	20	10	---
8	0	15	10	---	30	10	10	---	20	10	10	---
9	25	5	10	---	0	30	10	---	10	20	10	---
10	0	20	10	---	0	20	10	---	0	20	10	---
Всего	100	70	100	30	100	80	100	30	100	190	100	0

оптимизация величины страхового запаса даст возможность существенно уменьшить потери от дефицита свинца. Рассмотрим, насколько будут сокращены эти потери, если оптимальная величина страхового запаса составит 30,7 т. Для этого всю величину страхового запаса необходимо разделить на число последовательностей поставок и

§ 17.3. Оптимизация страховых запасов

найденное число округлить до ближайшего целого. Получим величину страхового запаса для каждой из трех последовательностей поставок. Для нашей задачи эта величина будет составлять 10 т. Исходя из объема и последовательности поставок свинца определим потери от хранения и дефицита с учетом величины страхового запаса. Для этого в каждую из граф страхового запаса трех последовательностей поставок табл. 17.2, введем планируемый объем страхового запаса в размере 10 тонн.

Определим общую величину потерь от хранения и дефицита с учетом страхового запаса:

$$L'_{\text{общ}} = 10 \cdot (70 + 80 + 190) + 10000 \cdot (30 + 30 + 0) = 603400 \text{ грн.}$$

Результаты расчетов показывают, что оптимизация величины страхового запаса позволила сократить общие затраты с 1851350 до 603400 грн. Потери от хранения и дефицита при этом снизились на 1247950 грн. Это было достигнуто за счет сокращения потерь от дефицита с 1850000 до 600000 грн. при некотором увеличении расходов на хранение с 1350 до 3400 грн. Увеличение величины страхового запаса, и как следствие этого, увеличение расходов на хранение на 2050 грн., дало возможность сократить потери от дефицита на 1260000 грн.

Краткое повторение

- ❑ **Потери от поставок** – общие потери производства, которые в себя включают потери от хранения сырья на складе и от дефицита.
- ❑ **Функция дефицита** – величина дефицита сырья определяемая как разность суммы объема поставок сырья и величины страхового запаса, и дневной потребности предприятия в сырье.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

подготовительный запас потери от поставок срок выполнения заказа стратегия управления запасами страховой запас	суммарные затраты управления запасом текущий запас точка возобновления заказа формула Уилсона функция дефицита
--	--

***Контрольные вопросы
и задания***



1. Проблема управления запасами.
2. Элементы модели управления запасами.
3. Стратегия управления запасами.
4. Особенности оптимизации текущих запасов.
5. Задача оптимизации текущих запасов. Ее решение.
6. Величина страховых запасов.
7. Задача оптимизации страховых запасов. Ее решение.

Г л а в а
18
МОДЕЛИ
МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ

В этой главе рассмотрены модели массового обслуживания, основные их компоненты, особенности формализации моделей. Представлены типы решаемых задач. Рассмотрены прикладные аспекты решения задач, сбора исходной информации. Проанализированы результаты решения задач, дана их экономическая интерпретация.

§ 18.1. Особенности формализации моделей

Основы теории массового обслуживания

Проблемы, с которыми мы довольно часто сталкиваемся на производстве и в сфере обслуживания нередко приводят к необходимости решения задач теории массового обслуживания. К числу таких примеров на производстве можно отнести потери вследствие простоя технологического оборудования и станков, из-за перебоев поставок сырья и материалов, топлива, электрической энергии, воды. Основное производство непрерывно испытывает потребность в расходных материалах, инструментах, запасных частях, комплектующих изделиях. Вспомогательные подразделения, ремонтное, энергетическое, транспортное и складское хозяйство выполняют все необходимые работы, связанные с удовлетворением запросов основного производства. Совокупность основного производства, а также вспомогательных подразделений и хозяйств, внутри предприятия, в целом представляют собой систему массового обслуживания. Точно также и отдельные цеха и участки внутри основного производства, требующие заготовок, полуфабрикатов или выполнения каких-либо работ и услуг, можно представить как обслуживаемые системы, а другие подразделения основного производства, удовлетворяющие эти запросы, – как обслуживающие

подсистемы. Совокупность этих цехов и участков внутри основного производства также представляет собой систему массового обслуживания. Границы такой системы могут простираться значительно дальше, если на межпроизводственном уровне поставщиками сырья, материалов, полуфабрикатов, комплектующих изделий и инструмента выступают отдельные предприятия.

Наряду с промышленным производством такого рода системы широко встречаются и в сфере обслуживания. В качестве примеров систем массового обслуживания можно привести такие финансовые учреждения, как банки (коммерческие, инвестиционные, инновационные, ипотечные, сберегательные), страховые организации (государственные, акционерные общества, компании), налоговые инспекции, аудиторские службы, различные предприятия и организации сферы обслуживания. Зайдя в эти учреждения, посетители очень часто вынуждены испытывать неудобства, простаивая в очередях в ожидании приема. Сюда же следует отнести неудобства и потери времени от стояния в очередях в магазинах, кафе, кинотеатрах, ателье, химчистках. К этому, можно добавить и очереди у лифтов, эскалаторов, бензозаправочных станций, светофоров.

Все упомянутые выше ситуации объединяет нечто общее, а именно то обстоятельство, что каждая из них характеризуется необходимостью пребывания в состоянии ожидания. Разумеется, было бы не плохо в каждой из этих ситуаций избежать испытываемых неудобств, связанных с вынужденным ожиданием.

Возникающий постоянно “феномен” ожидания является следствием вероятностного характера возникновения потребностей в том или ином виде обслуживания и несоответствия их возможностям систем массового обслуживания. Сложность решения этой проблемы заключается в том, что ни время возникновения потребности в обслуживании, ни их количество, ни продолжительность, как правило, заранее не известны. В противном случае возникающие потребности в обслуживании можно было регламентировать и удовлетворить целиком, исключая неприятную необходимость “ждать”.

С позиции моделирования задач теории массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди требований (заявок) на обслуживание, возникают следующим образом. Поступив в систему массового обслуживания, требование (заявка) попадает в очередь других (ранее поступивших) требований. Канал обслуживания (устройство, узел,

агрегат, рабочее место) выбирает одно (из находящихся в очереди) требование, с тем чтобы приступить к его обслуживанию. После завершения обслуживания поступившего из очереди требования обслуживающая система приступает к обслуживанию следующего требования (если такое в данный момент времени имеется в очереди на обслуживание). Цикл обслуживания повторяется многократно. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередного поступившего требования после завершения обслуживания предыдущего требования происходит мгновенно, т. е. без какой бы то ни было задержки.

Компоненты системы массового обслуживания

Систему массового обслуживания можно описать с помощью следующих компонент: входного потока, т. е. потока требований (заявок), поступающих на обслуживание; очереди требований; каналов (устройств, агрегатов, рабочих мест) обслуживания, выходного потока требований. Рассмотрим каждую из компонент системы более подробно.

Входной поток. Для описания входного потока требований следует задать необходимый закон распределения вероятностей на обслуживание и указать количество таких требований в каждом поступлении. Требования при этом могут поступать как *единичные* (в течение некоторого интервала времени поступает не больше одного требования), так и *групповые* требования (в течение некоторого интервала времени может поступить группа заявок). Длительность интервалов между последовательностями поступления требований чаще всего рассматривается как статистически независимые величины, которые задаются стационарно в течение продолжительного периода времени. Различными по своему характеру являются потоки, у которых момент поступления требования строго предопределен, и потоки у которых длительностью интервалов времени, между поступающими требованиями являются полностью независимыми.

Источник, генерирующий требования, обычно считается неисчерпаемым. Однако в ряде случаев, источник может быть способен порождать только ограниченное (конечное) число требований. Источник конечной емкости (или конечной мощности) имеет место в тех случаях, когда частота поступления очередного требования постепенно снижается.

Все процессы массового обслуживания протекают по одному и тому же принципу: требования (заявки) поступают в обслуживающую систему, обслуживаются каналами (устройствами) и покидают ее.

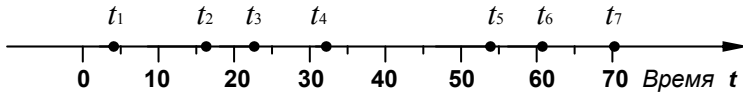


Рис. 18.1. Моменты поступления требований

Последовательность каких-то событий во времени называется потоком. Моменты их свершения t_n , обозначаются точками на числовой оси рис. 18.1, подобно потоку, то сужаются (сгущаются, учащаются), то расширяются (редеют). Подобно этому в виде потока можно представить и поступление требований в систему.

В некоторых случаях, при наличии большой очереди требование может отказаться от ожидания (т. е. в очередь не становится). В зависимости от обстоятельств оно может поступить на вход системы позднее. В ряде случаев требование не может встать в очередь из-за отсутствия свободных мест. Таким образом, характеристики входного потока (потока требований на обслуживание) часто зависят от состояния самой обслуживающей системы.

Очередь требований. Определяет порядок обслуживания требований, поступивших на вход системы. Чаще всего встречаются очереди со следующим порядком обслуживания: **первый пришел – первый обслуживаешься**, сокращенно: **FIFO** (first in first out). Такой порядок обслуживания с точки зрения математического моделирования является наиболее простым и описывает порядок поступления требований, *выстраиваемых в ряд*. Этот порядок наиболее типичен для сферы обслуживания: банков, магазинов, ателье, гостиниц, парикмахерских, бензозаправочных станций. Иногда встречается порядок обслуживания: **пришел последним – обслуживаешься первым**, сокращенно: **LIFO** (last in first out). Такого рода порядок наиболее часто используется при обработке грузовых вагонов, контейнеров, партий товаров, при штабелировании продукции на складе.

§ 18.1. Особенности формализации моделей

В ряде случаев порядок обслуживания может быть **случайным**. Для случайной очереди действительно сокращение: **SIRO** (serve in, random order). Иногда порядок обслуживания строится на основе установленных приоритетов, определенных предпочтений. Наконец, функционирующая система, может предусматривать **возможность отказа** от обслуживания требований до того как их обслужили.

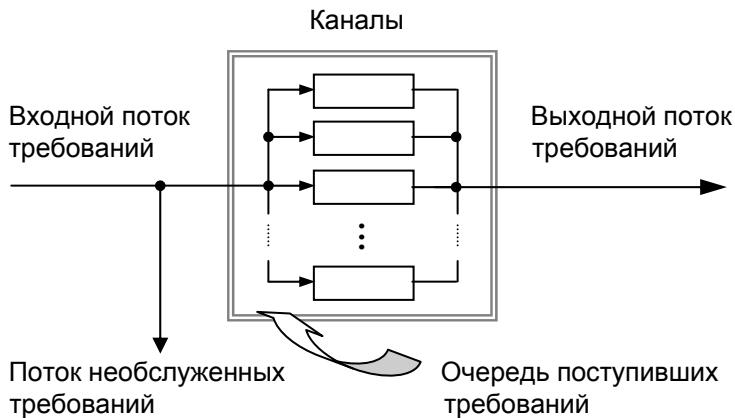


Рис. 18.2. Схема системы массового обслуживания

Каналы обслуживания. Каждая система массового обслуживания включает в свою структуру некоторое число устройств, которые называются **каналами** (устройствами, агрегатами, линиями) обслуживания. Роль каналов обслуживания могут выполнять как различные устройства (агрегаты, приборы, линии связи), так и обслуживающий персонал (операторы, кассиры, продавцы, официанты, парикмахеры).

Системы массового обслуживания могут быть *одноканальными* или *многоканальными*.

Каналы предназначены для обслуживания (выполнения) некоторого *потока* заявок (требований), поступающих на вход системы большей частью нерегулярно, случайно в те или иные моменты времени. Длительность времени необходимого для обслуживания заявок заранее неизвестна и зависит от целого ряда факторов. После обслуживания требования канал освобождается и готов к приему следующего требования. Случайный характер потока требований и

времени их обслуживания приводит к неравномерности загрузки системы массового обслуживания. Это приводит к тому, что в некоторые промежутки времени на входе системы могут скапливаться не обслуженные заявки, что ведет к перегрузке всей системы. В некоторые другие интервалы времени, при отсутствии необходимого числа поступивших требований простаивают каналы. Требования, скопившиеся на входе системы, либо “становятся” в очередь, либо по какой-то причине, связанной с невозможностью их дальнейшего пребывания в очереди, покидают систему не обслуженными. Схема построения системы массового обслуживания в наиболее общем виде, которая включает отдельные компоненты, представлена на рис.18.2.

Выходной поток. Выходной поток требований, представляет собой поток обслуженных системой заявок. Он характеризуется теснотой взаимодействия входного потока требования, каналов обслуживания и выходного потока. Эффективность этого взаимодействия определяется *временем обслуживания* системы. *Временем*

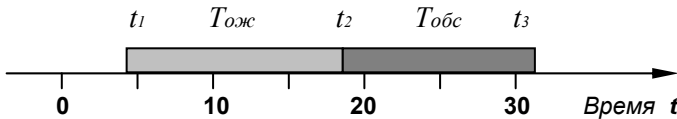


Рис. 18.3. Время ожидания и обслуживания требований

обслуживания является определенный отрезок времени от начала обслуживания (а не поступления требования в систему) до его завершения. Это связано с тем, что на обслуживание поступивших заявок системе требуется определенное время. Требования поступившие в систему, не найдя свободных каналов, становятся в очередь и ожидают, когда один из каналов освободится. В таком случае выходной поток будет состоять целиком из обслуженных требований. Бывают и такие ситуации, когда требования, поступившие в систему и не найдя свободных каналов, покидают систему не обслуженными. В этом случае выходной поток будет состоять как из обслуженных требований, так и из не обслуженных требований.

Временем обслуживания считается период, в течение которого удовлетворяется заявка на обслуживание, т. е. период от начала

обслуживания и до его завершения. Если какое-то требование поступило в систему в момент t_1 (рис. 18.3), однако канал был занят и приступил к обслуживанию лишь в момент t_2 и окончил обслуживание в момент t_3 , то разность $t_2 - t_1$ будет *временем ожидания обслуживания* $T_{ож}$, а *время обслуживания* $T_{обс}$ будет разность $t_3 - t_2$. Период между моментами t_1 и t_3 представляет собой *время нахождения требования в обслуживающей системе (в обслуживании и ожидании его)*. Время обслуживания является важнейшей характеристикой работы канала. Оно показывает, сколько времени тратится на выполнение одного требования.

Классификация систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания могут быть классифицированы по следующим наиболее типовым признакам: характеру входного потока, числу каналов обслуживания, дисциплине обслуживания требований, ограничению потока заявок, количеству этапов обслуживания.

По характеру входного потока требований, потоки могут быть *регулярными* – требования появляются строго регулярно через равные промежутки времени и *стохастические (вероятностные)* – моменты появления требований представляют собой случайные величины (которые заранее очень трудно предсказать).

Регулярные потоки требований легко описать количественно обычными математическими методами, поэтому они не представляют особого интереса для изучения и в теории массового обслуживания не рассматриваются.

Случайные величины (потоки требований) могут быть подчинены самым различным законам распределения вероятностей: нормальному распределению, бэ́та-распределению, показательному и др. Теория массового обслуживания накладывает достаточно жесткие ограничения на характер рассматриваемого потока требований. В настоящее время наиболее разработанными являются модели задач, в которых поток требований является *простейшим*. Простейшим потоком требования называется поток, который отвечает трем свойствам: *стационарности, ординарности и отсутствию последствий*.

Стационарным называется поток, для которого вероятность поступления определенного количества требований, в течение того или иного промежутка времени, не зависит от начала отсчета этого промежутка, а зависит от его длины. Иначе говоря, стационарность характера потока требований не изменяется со временем.

Ординарным называется поток, при котором в систему за определенный промежуток времени может поступить не более одного требования. Если за некоторый период времени поступает более одного требования, этот интервал можно уменьшить до такого предела, в течение которого в систему не поступит более одного требования (требования поступают по одному).

Потоком без последствий называется такой, в котором вероятность поступления определенного числа требований после какого-то произвольного момента t не зависит от числа требований, поступивших в систему до момента t .

По числу каналов обслуживания, системы подразделяются на *одноканальные* (когда имеется один канал $s = 1$) и *многоканальные* (когда число каналов $s > 1$). При этом предполагается, что каждый канал одновременно может обслужить только одно требование и, если не оговорено специально, каждое находящееся на обслуживании требование обслуживается только одним каналом. Многоканальные системы могут состоять из однотипных каналов, либо из разнотипных, отличающихся длительностью обслуживания требований.

По дисциплине обслуживания, системы массового обслуживания подразделяются на три класса:

- системы с *отказами* (нулевыми ожиданиями или явными потерями), в которых требования, поступившие на вход системы в момент, когда все каналы заняты, получают “отказ” и покидают систему (“пропадает”). Чтобы это требование все же было обслужено, оно должно снова поступить на вход системы и рассматриваться как требование, которое поступило впервые. Примером такой системы массового обслуживания может служить работа автоматизированной телефонной станции (АТС): если набранный телефонный номер занят, то требование получает отказ, и для того чтобы дозвониться по этому номеру, его следует набрать еще раз;

· системы с *ожиданием (очередью)*. Требование, поступившее в систему в момент, когда каналы заняты, ставится в очередь и ждет освобождения одного из каналов, который его обслужит. Каждое поступившее требование при этом, рано или поздно будет обслужено. Такие системы массового обслуживания наиболее часто встречаются в торговле и сфере бытового обслуживания;

· системы *смешанного типа*. Это такие системы, в которых на пребывание требования в очереди и порядок его обслуживания могут накладываться определенные ограничения. Ограничения накладываются на время пребывания требования в очереди, число требований или длину очереди. Примером такой системы, могут служить небольшие предприятия сферы бытового обслуживания.

По ограничению потока заявок, системы массового обслуживания делятся на *замкнутые* и *открытые*. Если поток поступающих требований ограничен и требования, покинувшие очередь, обратно уже не возвращаются, то такая система массового обслуживания является *замкнутой*. Примером такой замкнутой системы, может служить работа в цеху группы ремонтников, связанная с ремонтом и обслуживанием станков. Если же поток поступающих в систему требований не регламентирован, а требования, покинувшие очередь, при необходимости, могут возвращаться обратно, то такая система массового обслуживания является *открытой*. Примером открытой системы массового обслуживания, может служить работа ателье по ремонту телевизоров и бытовой радиоэлектроники.

По количеству этапов обслуживания, системы массового обслуживания делятся на *одноэтапные* и *многоэтапные*. Если операции по обслуживанию поступивших в систему требований выполняются рядом однотипных каналов параллельно, в одно и то же время, то такие системы являются одноэтапными. Если же операции по обслуживанию заявок выполняются каналами разных типов последовательно в несколько этапов, то такая система массового обслуживания является многоэтапной. Примерами таких систем массового обслуживания может служить работа станции технического обслуживания легковых автомобилей (мойка, диагностика, регулировка и ремонт двигателей и т. д.).

Краткое повторение

- ❑ **Входной поток требований** – последовательность *требований (заявок)*, поступающих в систему массового обслуживания. Они возникают случайным образом, и требуют определенного, обычно заранее непредсказуемого времени для их обслуживания.
- ❑ **Очередь требований** – последовательность поступающих в систему *требований (заявок)*, на обслуживание, которые заставляя каналы занятыми не выбывают, а ожидают их освобождения (затем они обслуживаются в заданном порядке). Очередью можно назвать также и совокупность ожидающих (простаивающих) каналов системы массового обслуживания.
- ❑ **Каналы обслуживания** – устройства (агрегаты, линии), способные в данный момент времени обслужить лишь одно требование. Пропускная способность канала – один из определяющих параметров при решении задачи массового обслуживания.
- ❑ **Выходной поток требований** – поток обслуженных системой требований (заявок). Если какая-либо часть требований покидает систему не обслуженной, то выходной поток будет состоять из обслуженных и не обслуженных требований.
- ❑ **Время обслуживания** – это время, затраченное системой массового обслуживания на обслуживание отдельного требования (заявки). Длительность периода времени определяется от начала обслуживания (а не поступления требования в систему) до его завершения.

§ 18.2. Постановка задач массового обслуживания

Прикладные аспекты постановки задач

Использование экономико-математических методов для решения задач теории массового обслуживания в промышленном производстве открывает широкие возможности повышения эффективности работы предприятий, дальнейшего совершенствования их организации и управления. Направлением повышения эффективности является оптимизация технологических процессов основных и вспомогательных производств, организация бесперебойной и ритмичной работы отдельных цехов и участков.

В промышленном производстве направлением дальнейшего совершенствования может служить: организация работы ремонтного, энергетического и транспортного цехов; складского хозяйства; мастерских по ремонту оснастки и приспособлений; отделений заточки инструмента; служб технического контроля; содержания и ремонта оборудования; внутрицехового транспорта; кладовых для хранения материалов и заготовок; межоперационных и инструментально-раздаточных кладовых.

Запросы на услуги этих подразделений и служб поступают от участков производственных цехов крайне не регулярно (например, возникающие поломки, необходимость наладки оборудования, запросы на выдачу инструмента). Выполнение обслуживающих операций также большей частью занимает разные по продолжительности периоды времени. Все это в целом создает необходимые предпосылки для анализа эффективности работы указанных цехов, участков и служб, методологической основой которого может служить теория массового обслуживания.

Технологические линии, конвейерные потоки и другие участки основного производства, занятые выпуском продукции, также могут быть представлены как системы массового обслуживания. Если в их работе имеются некоторые элементы не регулярности (например потоки со сводным ритмом) и если связь между отдельными цехами, участками, службами и подразделениями предприятия напоминает систему массового обслуживания, то для выявления внутрипроизводственных резервов могут быть сформулированы и решены экономико-математические модели.

Начальный этап формулировки задачи заключается в выборе объекта исследования и установлению основного круга решаемых вопросов. Центральная роль при этом отводится установлению возможного влияния различных факторов на эффективность работы всей системы. К факторам, влияющим на качество работы системы массового обслуживания в промышленном производстве в первую очередь можно отнести: численность обслуживающего аппарата; количество источников требования; затраты на содержание аппарата; объем выпуска продукции и т. п. В результате качественного анализа можно установить, что увеличение количества обслуживающего аппарата ведет к улучшению обслуживания, а значит и к уменьшению простоев и увеличению выпуска продукции. Это дает возможность предположить, что можно найти наиболее оптимальный размер обслуживающей системы, позволяющей достичь необходимой эффективности. То же самое относится и к экспериментированию с количеством обслуживаемых объектов: уменьшением размера системы приводит к улучшению качества обслуживания, но, в то же время, увеличивает удельные расходы по обслуживанию, что снижает эффективность от улучшения обслуживания объектов.

Формулирование модели массового обслуживания исследуемой производственной системы заключается в конкретном определении основных понятий в терминах теории массового обслуживания для данной задачи:

- что подразумевается в данных условиях под понятием требование и поток требований;
- что означает время обслуживания для данной задачи;
- что является источником поступления требований в систему, может ли быть подсчитано количество поступивших требований;
- что представляют собой обслуживающий аппарат (каналы) системы и каково их количество;
- каков характер обслуживания в системе (с потерями или с ожиданием, упорядоченный или неупорядоченный).

Ответы на эти вопросы создают необходимые предпосылки для формулирования задач теории массового обслуживания, позволяя достичь необходимого уровня эффективности функционирования производственной системы при различных вариантах их организации.

Сбор исходной информации для решения задачи

Сбор исходной информации и ее первичная обработка являются подготовительным этапом решения задачи массового обслуживания. Цель данного этапа состоит в сборе и обеспечении всеми необходимыми данными для проведения последующих расчетов. Исходными данными

для решения задачи теории массового обслуживания служат:

- тип закона распределения, описывающего поток требований и время обслуживания, и параметры этих законов. Они являются основными данными при моделировании задач теории массового обслуживания и определяются путем наблюдения за функционированием исследуемой системы. Наблюдения могут проводиться как непрерывно в течение определенного периода времени, так и с помощью моментных наблюдений;

- количество источников поступления требований в систему (если подсчет их возможен, т. е. если формулируется модель задачи с конечным числом обслуживаемых устройств). В том случае, когда поток может быть принят как ограниченный, то он может рассматриваться как единичный поток, в случае когда поток неограниченный – то как суммарный поток. Выбор одной из форм наблюдения зависит от удобства наблюдения и специфических особенностей исследуемой системы;

- количество обслуживающих устройств (каналов) в системе определяется еще на стадии предварительных исследований, при формулировании модели и выборе типа решаемой задачи. Если выбрана модель с конечным числом устройств и с ограниченной очередью на обслуживание, то их количество определяется исходя из технических, производственных и других условий. Обслуживающими устройствами в задачах, которые могут быть сформулированы при поиске резервом роста эффективности производства, могут выступать: конвейерные потоки, технологическое оборудование и станки. Очень часто объектами исследования выступают рабочие (слесари-ремонтники, электрики, наладчики), обеспечивающие бесперебойную работу цехов предприятия. Как и в случае с обслуживающими устройствами, численность обслуживающих рабочих определяется путем количественного подсчета отдельных групп и работающих.

Объекты обслуживания и устройства, а также рабочие места в производственных задачах можно подразделить на *подвижные* и *стационарные*. Примером такого обслуживания является обеспечение рабочих мест инструментом, когда рабочие получают требуемый инструмент в инструментально-раздаточных кладовых. Объекты обслуживания в таких системах подвижные, а обслуживающий аппарат – стационарный. В других системах наблюдается обратное – обслуживающий аппарат направляется для обслуживания поступившего требования к месту нахождения объекта (например, ремонтники, электрики, наладчики) и является подвижным, а источники требований – стационарными. В зависимости от этого может быть выбран способ наблюдения (подвижный или неподвижный), место наблюдения (по месту нахождения обслуживаемых объектов или по месту нахождения обслуживающего аппарата) и количество наблюдаемых объектов, посылающих требования (весь поток или единичные потоки в зависимости от возможностей наблюдения).

Интенсивность поступления в систему требований на обслуживание и средняя длительность времени обслуживания также оказывают определенное влияние на выбор способа наблюдения: при частом появлении требований и при коротком периоде их обслуживания наблюдатель будет не в состоянии наблюдать и фиксировать моменты появления требований и будет вынужден, ограничится исследованием единичных потоков; при не частом появлении требований и при длительном времени обслуживания не рационально ограничиваться наблюдением только единичного потока от одного источника, если есть возможность наблюдать несколько единичных потоков или весь суммарный поток, поступающий в обслуживающую систему.

Исследование времени обслуживания поступивших требований является заключительной стадией сбора и обработки информации. Зная характер потока требований и время обслуживания, можно сделать окончательное заключение о возможности постановки задачи и ее решения с помощью методов теории массового обслуживания. Собранные данные о моделируемой производственной системе, типе производства, возможных вариантах совершенствования организации и управления, объемах и сроках поставок сырья и материалов, потребителях продукции, внутривыпускных потоках, количестве выпускаемой продукции, затратах на производство, численности рабочих служат исходными данными для последующего этапа решения задачи.

**Интерпретация
результатов
расчетов**

Интерпретация результатов экспериментальных расчетов решения задач теории массового обслуживания неизменно предполагает необходимость качественного анализа возможных вариантов организации процесса производства. Построение экономико-математических моделей промышленного производства не всегда позволяет целиком отразить все реальности протекания экономических процессов. Кроме того, и сами выводы теории массового обслуживания основаны на принятых допущениях и предположениях, а также некотором упрощении процесса производства. В связи с этим, не всегда следует ожидать полного соответствия расчетных данных реальным результатам. К этому следует добавить, что исследуемые зависимости по большей части имеют вероятностную, статистическую природу, т. е. проявляются не в каждом отдельном случае, а в среднем в массе однородных испытаний. Тем не менее, практика показывает, что в большинстве случаев решаемых задач теории массового обслуживания реальные производственные процессы могут быть описаны с достаточной степенью точности. Это позволяет сделать необходимый вывод о возможности существенного улучшения организации производственного процесса.




На заключительном этапе исследования используются не только методы качественного экономического анализа, но и различные количественные математические методы, а также приемы, которые позволяют определить эффективность проведения отдельных организационных мероприятий. Количественному анализу подвергаются прежде всего данные расчетов, проведенных на предыдущих этапах исследований. Анализируя экономические показатели и полученные результаты следует провести ряд дополнительных вычислений, с тем чтобы иметь возможность выбора наиболее оптимального варианта организации производственного процесса с точки зрения принятых критериев. Выполняемые расчеты могут иметь различную направленность в зависимости от особенностей моделируемых производственных процессов, которые описываются при помощи методов теории массового обслуживания. Некоторые из таких решаемых задач будут рассмотрены в этой теме. Они применимы для типичных моделей задач массового обслуживания с ожиданием и с ограниченным потоком требований, в которых обслуживающей системой являются подразделения основного и вспомогательных производств, обеспечи-

вающих бесперебойную и ритмичную работу цехов предприятий. В этом случае расчеты имеют достаточно логичный объяснимый смысл и довольно точно определяют оптимальный вариант организации.

Для других, реже встречающихся, моделей задач массового обслуживания, которые могут быть сформулированы при рассмотрении вопросов поиска внутренних резервов роста производства, полный расчет эффективности часто бывает достаточно затруднен, а иногда и вовсе не возможен.

Моделирование возможных вариантов решения производственных задач теории массового обслуживания является одним из наиболее действенных инструментов выявления внутренних резервов роста эффективности. Получаемые при этом результаты служат научным обоснованием необходимости проведения тех или иных реорганизационных преобразований, или же доказывают правильность существующей организации работы производственных подразделений.

Краткое повторение

-  **Формализация модели массового обслуживания** – описание задачи выбора оптимального варианта организации производственного процесса в терминах теории массового обслуживания.
-  **Сбор исходной информации для решения задачи** – сбор информации и ее первичная обработка с целью обеспечения необходимыми данными, решаемых задач теории массового обслуживания.
-  **Интерпретация результатов расчетов** – выполнение количественного и качественного анализа полученных результатов решения задачи теории массового обслуживания.

§ 18.3. Решение задач массового обслуживания

Типы решаемых задач

Построение и решение задач теории массового обслуживания открывает широкие возможности их практического использования для совершенствования организации и управления промышленного производства. Модели решаемых задач при этом могут отличаться одна от другой как характером распределения потока требований, распределением времени обслуживания, числом каналов обслуживания, дисциплиной очереди требований, максимальным числом поступающих требований, емкостью источника генерирующего поступающие требования.

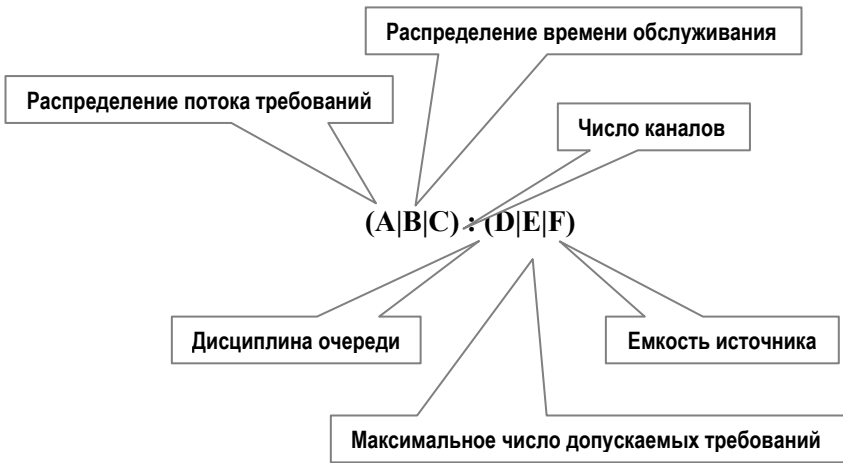


Рис. 18.4. Унифицированный код типа задачи

Для обозначения модели типа решаемой задачи массового обслуживания используется унифицированный шестизначный код. Тип решаемой задачи кодируется как представлено на рис.18.4. Символы А, В, С, D, E, F – здесь обозначают модельную конструкцию задачи

теории массового обслуживания. Приведем перечень общепринятых обозначений, которые характеризуют распределение вероятностей, ставящихся в соответствие моделям массового обслуживания:

- М – экспоненциальное распределение продолжительностей интервалов между поступлениями требований или длительностью обслуживания;
- D – детерминированное (или регулярное) распределение длительностей интервалов между поступлениями требований или длительности обслуживания;
- E_n – n -фазное распределение Эрланга для длительностей интервалов между поступлениями требований или длительностей обслуживания;
- GI – рекуррентный характер входного потока, длительность поступления отдельных требований которого, статистически независима и имеет одинаковое распределение;
- G – общий вид распределения длительностей обслуживания (т. е. когда не делается никаких конкретизирующих предположений относительно функции распределения).

Несмотря на то, что основные соотношения, формируемые в моделях теории массового обслуживания, можно использовать для широкого круга решаемых задач, которые отражают как переходные, так и стационарные процессы, главное внимание будет сконцентрировано на анализе стационарных процессов и интерпретации полученных результатов. Это обусловлено тем, что в системы массового обслуживания создаваемые в промышленном производстве предназначены для устойчивой работы предприятий на протяжении довольно длительного периода времени. Вместе с тем, следует отметить, что не смотря на определенный интерес, анализ неустановившихся стохастических процессов, как правило, связан со значительными математическими трудностями решения прикладных задач.

**Одноканальная
задача
массового
обслуживания**

Для бесперебойной и ритмичной работы трех участков цеха, оснащенных станками с числовым программным обеспечением в цеху трудится группа наладчиков станков, численностью три человека. Наладчики обслуживают закрепленные за ними участки, на каждом из которых установлено четыре фрезерных станка. Анализ работы участков цеха показывает, что в среднем в течение одного часа, каждый из станков с числовым программным обеспечением требует одного обслуживания наладчиком связанного со сменой заготовок и заменой фрез. За один час работы наладчик может обслужить шесть фрезерных станков.

Опишем эту задачу в терминах теории массового обслуживания. Количество станков обслуживаемых на участке обозначим как $m = 4$. Поток требований поступающих на обслуживание этих станков распределяется по закону Пуассона. В среднем в течение одного часа, поступает одно требование на обслуживание станков $\lambda = 1$. В качестве канала обслуживания, при этом выступает наладчик, обслуживающий станки на участке $s = 1$. Продолжительность обслуживания станков распределяется по показательному закону. Производительность наладчика определяется его способностью обслужить шесть станков за один час работы $\mu = 6$.

Для анализа обслуживания станков на участке выберем модель массового обслуживания типа $(M | M | 1) : (GD | N | \infty)$. При этом следует считать, что порядок обслуживания требований не зависит от дисциплины очереди, а максимальное число допускаемых требований равно N . В ходе решения задачи необходимо найти: коэффициент простоя требований в очереди; коэффициент простоя станков в системе; коэффициент простоя наладчиков. Так же следует определить среднее время ожидания требований в очереди.

Прежде всего, определим *интенсивность обслуживания*. Для

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}; \quad (18.1)$$

нашей задачи расчетная величина интенсивности обслуживания будет соответственно равна $\rho = 0,16666667$. Максимально возможное число требований, которые одновременно могут находиться в системе,

ограничено числом обслуживаемых станков.

Для нахождения значений расчетных коэффициентов в начале следует определить математическое ожидание (*среднее значение числа требований* находящихся в очереди на обслуживание):

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^m k P_k, \quad (18.2)$$

где k – число требований, поступивших в систему обслуживания; P_k – вероятность того, что в системе находится k требований:

$$P_k = \frac{m!}{(m-k)!} \rho^k P_0, \quad (18.3)$$

где P_0 – вероятность того, что в системе нет ни одного требования:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^m \frac{m! \rho^k}{(m-k)!}}. \quad (18.4)$$

Для удобства проведения расчетов, требуемые вычисления лучше всего выполнять в специальной таблице расчета параметров

Таблица 18.1

Расчетные параметры одноканальной задачи

k	$\frac{m!}{(m-k)!}$	ρ^k	$\frac{m!}{(m-k)!} \rho^k$
1	4	0,16666667	0,66666668
2	12	0,02777778	0,33333336
3	24	0,00462963	0,11111112
4	24	0,00077160	0,01851840
$\sum_{k=1}^m \frac{m!}{(m-k)!} \rho^k = 1,12962956$			

§ 18.3. Решение задач массового обслуживания

задачи (табл. 18.1). Вероятность того, что в системе нет ни одного требования P_0 , рассчитывается по формуле (18.4) и будет равна:

$$P_0 = \frac{1}{1 + 1,12962956} = 0,46956523.$$

Таким образом, *вероятность того, что в систему не поступит ни одного требования* на обслуживание станков на участке, численно равна 0,46956523274.

Далее по формуле (18.3) определим P_k – вероятность значения того, что в системе находится k требований. При этом учитывается как вероятность отсутствия, каких-либо поступивших требований $k=0$, так и поступление наибольшего количества требований на обслуживание станков $k=4$. Результаты расчетов *вероятности*

Таблица 18.2

Вероятность поступления требований в систему

Количество требований поступивших в систему k	Количество станков которые обслуживаются m	Количество станков ожидающих обслуживания $k - 1$	Наладчики не занятые ремонтом станков $s - k$	P_k
0	0	0	1	0,46956523
1	1	0	0	0,31304349
2	1	1	0	0,15652176
3	1	1	0	0,05217392
4	1	1	0	0,00869560
$\sum_{k=1}^m P_k =$				1,00000000

поступления требований по каждому из возможных вариантов представлены в таблице 18.2. Здесь также приведена необходимая информация о количестве станков которые обслуживаются, ожидают обслуживания и не занятых ремонтом наладчиков. На основе этих данных, по формуле (18.2) рассчитаем *среднее значение числа*

требований, находящихся в очереди на обслуживание:

$$\bar{k} = 1 \cdot 0,31304349 + 2 \cdot 0,15652176 + 3 \cdot 0,05217392 + 4 \cdot 0,00869560 = 0,81739117.$$

Результаты расчетов показывают, что в среднем в очереди на обслуживание находится 81,7% фрезерных станков.

Математическое ожидание числа требований в очереди определим по следующей формуле:

$$\bar{\gamma} = \sum_{k=s+1}^m (k-s)P_k, \quad (18.5)$$

$$\bar{\gamma} = (2-1) \cdot 0,15652176 + (3-1) \cdot 0,05217392 + (4-1) \cdot 0,00869560 = 0,2869564.$$

Таким образом, в ожидании в среднем простаивает 28,7% требований поступивших на обслуживание фрезерных станков.

Коэффициент простоя требований в очереди определим по формуле:

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\gamma}}{m}; \quad (18.6)$$

$$\alpha_1 = \frac{0,2869564}{4} = 0,0717391.$$

Таким образом, в очереди на обслуживание простаивает 7,2 % поступивших требований.

Коэффициент простоя станков в системе определяется по следующей формуле:

$$\alpha_2 = \frac{\bar{k}}{m}; \quad (18.7)$$

$$\alpha_2 = \frac{0,81739117}{4} = 0,2043477925.$$

Выполненные расчеты показывают, что в ожидании обслуживания простаивает 20,4% станков.

§ 18.3. Решение задач массового обслуживания

Среднее количество не занятых каналов (математическое ожидание простоя каналов) рассчитывается по формуле:

$$\bar{z} = \sum_{k=0}^s (s - k) P_k. \quad (18.8)$$

Для одноканальной модели задачи массового обслуживания, какая-либо оптимизация количества используемых каналов лишена всякого смысла. В рассматриваемом примере наладчик станков с числовым программным обеспечением один. Сокращение рабочего наладчика на участке при такой форме организации обслуживания неизбежно приведет к остановке фрезерных станков.

Коэффициент простоя каналов обслуживания (наладчиков) рассчитывается при $s > 1$ по следующей формуле:

$$\beta = \frac{\bar{z}}{s}. \quad (18.9)$$

Для задач массового обслуживания при $s = 1$, значения расчетных коэффициентов β и z совпадают и равны P_0 . В рассматриваемой задаче $P_0 = 0,46956523$, что соответствует почти 47 % времени работы наладчика. Потери рабочего времени довольно значительные. Они составляют почти половину рабочего дня. Сократить их можно за счет расширения зоны обслуживания фрезерных станков, однако это приведет к увеличению коэффициентов простоя α_1 и α_2 . Таким образом, возникает проблема оптимизации количества станков на участках и количества закрепленных за ними наладчиков.

Определим среднее время ожидания требований в очереди:

$$t_{ож} = \frac{\bar{\gamma}}{\lambda(m - \bar{k})}; \quad (18.10)$$

$$t_{ож} = \frac{0,2869564}{3,18260883} = 0,09 \text{ ч, или } 5,4 \text{ мин.}$$

Среднее время ожидания требований в очереди на обслуживание для фрезерных станков составляет 5,4 минуты.

**Многоканальная
задача
массового
обслуживания**

В отличие от одноканальной задачи массового обслуживания многоканальная открывает широкие возможности всестороннего экспериментирования с количеством обслуживаемых объектов и числом каналов обслуживания, оптимизацией количества станков и наладчиков в цеху. Если предположить, что оставляя неизменным общее количество станков в цеху $m = 12$, можно увеличить количество фрезерных станков на участках, то это приведет к уменьшению участков цеха и наладчиков с трех до двух. Количество поступающих требований $\lambda = 1$, производительность наладчиков $\mu = 6$ и порядок обслуживания при этом остаются прежними. Тип модели задачи теории массового обслуживания может быть закодирован и представлен в следующем виде (M | M | S) : (GD | N | ∞).

Для решения задачи найдем коэффициент: простоя требований в очереди; простоя станков в системе; простоя наладчиков. В начале определим *интенсивность обслуживания*. Для многоканальной

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}; \tag{18.11}$$

задачи расчетная величина интенсивности обслуживания будет соответственно равна $\rho = 0,16666667$.

После этого определим *среднее значение числа требований, находящихся в очереди на обслуживание*:

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^m k P_k, \tag{18.12}$$

где k – число требований, поступивших в систему обслуживания; P_k – вероятность того, что в системе находится k требований:

$$P_k = D_k^s P_0, \tag{18.13}$$

где значение D_k^s находится с помощью рекуррентных формул. Для числа требований меньшего, чем количество каналов, т. е. $k < s$

§ 18.3. Решение задач массового обслуживания

$$D_k^s = \frac{m-k+1}{k} \rho D_{k-1}^s, \quad (18.14)$$

когда число требований $k \geq s$

$$D_k^s = \frac{m-k+1}{s} \rho D_{k-1}^s, \quad (18.15)$$

а P_0 – вероятность того, что в системе нет ни одного требования:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^m D_k^s}. \quad (18.16)$$

Таблица 18.3

Расчетные параметры многоканальной задачи

k	Количество свободных наладчиков	Рекуррентная формула	D_k^s	P_k
0	3	$D_k^s = \frac{m-k+1}{k} \rho D_{k-1}^s$ при $k < s$	1,00000000	0,14891797
1	2		1,99999992	0,29783593
2	1		1,83333319	0,27301626
3	0	$D_k^s = \frac{m-s+1}{s} \rho D_{k-1}^s$ при $k \geq s$	1,01851840	0,15167569
4	0		0,50925918	0,07583784
5	0		0,22633740	0,03370571
6	0		0,08802001	0,01310776
7	0		0,02934000	0,00436925
8	0		0,00815000	0,00121368
9	0		0,00181112	0,00026970
10	0		0,00030185	0,00004495
11	0		0,00003354	0,00000499
12	0		0,00000186	0,00000027
$\sum_{k=1}^m D_k^s =$			5,71510647	

Для удобства вычислений, результаты операций лучше всего поместить в специальную таблицу расчетных параметров многоканальной задачи теории массового обслуживания (табл. 18.3).

Среднее значение числа требований находящихся в очереди на обслуживание при этом составит:

$$\bar{k} = 1 \cdot 0,29783593 + 2 \cdot 0,27301626 + \dots + 12 \cdot 0,00000027 = 1,88789474.$$

Далее по аналогии с решением предыдущей задачи определим значение параметров: $\gamma, z, \alpha_1, \alpha_2, \beta, t_{ож}$.

С этой целью определим *среднее количество требований*, ожидающих начала обслуживания, т. е. математическое ожидание числа требований в очереди:

$$\bar{\gamma} = \sum_{k=s+1}^m (k-s)P_k, \quad (18.17)$$

$$\bar{\gamma} = (4-3) \cdot 0,07583784 + (5-3) \cdot 0,03370571 + (6-3) \cdot 0,01310776 + (7-3) \cdot 0,00436925 + \dots + (12-3) \cdot 0,00000027 = 0,20809314.$$

После этого, необходимо найти математическое ожидание простоя наладчиков (*среднее количество не занятых каналов*):

$$\bar{z} = \sum_{k=0}^s (s-k)P_k, \quad (18.18)$$

$$\bar{z} = (3-0) \cdot 0,14891797 + (3-1) \cdot 0,29783593 + (3-2) \cdot 0,27301626 = 1,31544203.$$

Затем определим коэффициент простоя станков в ожидании обслуживания (*коэффициент простоя требований в очереди*):

$$\alpha_1 = \frac{\bar{v}}{m}; \quad (18.19)$$

$$\alpha_1 = \frac{0,20809314}{12} = 0,00173411.$$

§ 18.3. Решение задач массового обслуживания

Рассчитаем коэффициент простоя станков в системе:

$$\alpha_2 = \frac{\bar{k}}{m}; \quad (18.20)$$

$$\alpha_2 = \frac{1,88789474}{12} = 0,15732456.$$

Затем найдем коэффициент простоя каналов обслуживания:

$$\beta = \frac{\bar{z}}{s}; \quad (18.21)$$

$$\beta = \frac{1,31544203}{3} = 0,43848067.$$

Определим среднее время ожидания требований в очереди:

$$t_{ож} = \frac{\bar{\gamma}}{\lambda(m - \bar{k})}; \quad (18.22)$$

$$t_{ож} = \frac{0,20809314}{1,11210526} = 0,19 \text{ ч или } 11,2 \text{ мин.}$$

Краткое повторение

■ **Унифицированный код задачи** – шестизначный код задачи теории массового обслуживания, который характеризуется потоком требования, распределением времени обслуживания, числом каналов обслуживания, дисциплиной очереди требований, максимальным числом требований, емкостью источника требований.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

время обслуживания
входной поток требований
выходной поток требований
интерпретация результатов
каналы обслуживания
многоканальная задача

одноканальная задача
очередь требований
сбор исходной информации
унифицированный код типа задачи
формализация модели

***Контрольные вопросы
и задания***



1. Основы теории массового обслуживания.
2. Компоненты системы массового обслуживания.
3. Классификация систем массового обслуживания.
4. Прикладные аспекты постановки задач.
5. Сбор исходной информации для решения задач.
6. Интерпретация результатов расчетов.
7. Типы решаемых задач массового обслуживания.
8. Одноканальная задача массового обслуживания.
9. Многоканальная задача массового обслуживания.

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ



- Абсолютная уступка** – уступка, при которой суммарный уровень снижения значений одного или нескольких критериев не превосходит суммарного абсолютного уровня повышения критериев.
- Абстрактная модель** – система формализованных математических выражений, описывающих моделируемый объект или процесс.
- Абстрактная форма** – форма представления в результате абстрагирования от условий реальности.
- Абстракция** – отвлечение, идеализированное понятие, отражающее реальность в достаточно упрощенной форме.
- Агрегированные переменные** – объединенные, укрупненные переменные, полученные на основе преобразования модели в модель с меньшим числом переменных и ограничений.
- Адаптация** – приспособление *системы* к реальным условиям. Адаптация бывает пассивной (реагирование системы на изменение среды) и активной (воздействие системы на среду). В соответствии с этим моделируемые системы подразделяются на *самонастраивающиеся* и *самоорганизующиеся*. В

первом случае в соответствии с изменениями внешней среды меняется способ функционирования системы, во втором – ее структура.

- Аддитивность** – одно из допущений линейного программирования относительно баланса объемов распределения между технологическими способами ресурсов, равного суммарному их количеству, поступившему в процесс производства, за минусом суммарного их количества, выходящего из него.
- Адекватность модели** – соответствие *модели* моделируемому объекту или процессу. Адекватность понятие условное, так как полностью соответствовать реальному объекту модель не может.
- Альтернатива** – необходимость выбора между несколькими взаимоисключающими возможностями. В моделировании под альтернативой может пониматься как само решение, так и *результат* его реализации.
- Альтернативность вариантов** – возможность выбора одного из вариантов.
- Альтернативность вариантов развития** – выбор на множестве вариантов одного из планов модернизации старого предприятия или строительства нового.
- Альтернативность выбора** – множественность возможных вариантов, определяемая “свободой выбора”, наличием некоторого числа альтернативных решений.
- Анализ** – исследовательский метод, состоящий в том, что объект рассматривается как *система*, мысленно или практически расчленяется на составные *элементы* (признаки, свойства, отношения и т. п.) для изучения каждого из них в отдельности и выявления их роли и места в системе.

Анализ временных рядов – область исследования экономической динамики. Основными понятиями анализа временных (динамических) рядов являются: *тренд*, или длительность, “вековая” тенденция; *лаг*, или запаздывание одного явления от другого, связанного с ним.

Аналогия – логический вывод, в результате которого знание о признаках одного объекта возникает на основании известного сходства его с другими объектами. Она лежит в основе *экономико-математического* и *экспериментального* подходов к изучению экономики.

Б

Балансовая модель – *система уравнений* (балансовых соотношений, балансовых уравнений), которые удовлетворяют требованию соответствия двух элементов: наличия *ресурсов* и их использования. Основная информация для балансовой модели содержится в *матрице* коэффициентов затрат ресурсов. Балансовая модель не предусматривает возможности сравнения альтернативных вариантов развития и взаимозаменяемости различных ресурсов.

Блок – часть сложной *системы*, которая рассматривается самостоятельно.

Блочная матрица – *матрица*, разбитая вертикальными и горизонтальными линиями на “*блоки*”, которые являются матрицами меньших размеров, и при выполнении тех или иных действий над ней рассматриваются как ее *элементы*.

Блочная матрица оптимизации загрузки оборудования – объединенная матрица локальных задач рационального распределения работ на предприятии.

В

- Валидация модели** – проверка соответствия *результатов* полученных в ходе вычислений, реальным данным. Производится тогда, когда экспериментатор убедится на предшествующей стадии (*верификации*) в правильности структуры (логики) модели.
- Введение дополнительной переменной** – прием приведения модели к каноническому виду. Эта переменная показывает, насколько может быть увеличено (уменьшено) значение ограничений, что дает возможность корректировать величину лимитированных ресурсов
- Введение отраженной переменной** – прием моделирования, позволяющий суммировать произведение технологических коэффициентов на значения этих переменных.
- Вектор “затраты–выпуск”** – вектор, содержащий компоненты двух видов: выпускаемые *продукты* (обычно эти компоненты положительные) и продукты, затрачиваемые в производстве (отрицательные).
- Векторная оптимизация** – комплекс методов решения задач математического программирования, в которых *критерий оптимальности* представляет собой *вектор*, компонентами которого являются, в свою очередь, несводимые друг к другу критерии оптимальности подсистем.
- Верификация модели** – проверка истинности, правильности структуры (логики) модели, *адекватности*.
- Взаимо-заменяемость ресурсов** – возможность выбора одного из вариантов замены одного вида *ресурса* другим.
- Внешнее дополнение** – учет возможности компенсации влияния *внешней среды*, которое не удастся формализовать в модели

производственной системы.

- Время обслуживания** – время, затраченное системой массового обслуживания на обслуживание требований (заявок). Если какая-то часть требований, покидает систему не обслуженными, то входной поток будет состоять из обслуженных и не обслуженных требований.
- Вспомогательная переменная** – переменная, которая вводится в модель для аккумулярования числовых величин расчетных значений объема выпуска продукции и потребления ресурсов. Как правило, они не имеют какого-либо определенного экономического толкования.
- Вспомогательное ограничение** – ограничение, которое вводится в модель для обеспечения правильной формулировки экономических требований и математической записи системы линейных ограничений.
- Вторичный раскрой** – одна из специфических особенностей задач раскроя, когда из заготовок большего размера, которые получены в избытке, выкраивают заготовки меньших размеров.
- Входной поток требований** – последовательность *требований (заявок)*, поступивших в систему массового обслуживания. Они возникают случайным образом, и требуют определенного, обычно заранее не предсказуемого времени для их обслуживания.
- Выбор принципа оптимальности** – определение свойств оптимального решения, дающего ответ на основной вопрос, в каком смысле данное оптимальное решение лучше всех остальных решений (превосходит другие решения).
- Выбор схемы компромисса** – выбор стратегии нахождения компромисса при несовпадении или противоположности целей.

Выходной поток требований – поток обслуженных системой требований (заявок). Если какая-либо часть требований покидает систему не обслуженной, то выходной поток будет состоять из обслуженных и не обслуженных требований.

Г

Гипотеза – предположение, требующее научного доказательства. Проверка и подтверждение гипотезы означает ни что иное, как переход на более высокий уровень знаний об изучаемом *объекте* или *процессе*.

Д

Двойственная задача – каждой задаче *линейного программирования* можно построить своего рода симметричную: *функционалы оптимальных решений* у обеих задач совпадают, но если в прямой задаче они отражают наиболее эффективную комбинацию *ресурсов*, которая дает максимум *целевой функции*, то в другой, двойственной – наиболее эффективную комбинацию расчетных *цен* (оценок) *ограниченных ресурсов*.

Двойственные оценки – оценки ресурсов, продуктов, работ, которые вытекают из условий решения *оптимизационной задачи*. Будучи элементами *двойственной задачи* линейного программирования, они показывают, насколько изменится значение *критериев оптимальности* в соответствующей прямой задаче при приращении данного ресурса на единицу (т. е. имеют предельный характер).

Двухуровневая модель – оптимизационная модель, решаемая на глобальном и локальном уровнях, при очень тесной координации результатов расчетов, полученных на всех модели-

руемых уровнях.

- Деагрегированные – переменные** – детализированные переменные, полученные в результате трансформации модели в модель большей размерности.
- Декомпозиция целей** – разделение единой цели на отдельные подцели в соответствии с рассматриваемыми аспектами решаемой проблемы.
- Дескриптивная модель** – *модель*, предназначенная для описания и объяснения наблюдаемых фактов или *прогноза поведения объектов* в отличие от *нормативных моделей*, предназначенных для нахождения желательного (например, оптимального) состояния объекта.
- Детерминированная – задача** – аналитическое представление закономерности, операции и т. п., при которых для данной совокупности выходных значений на выходе модели может быть получен единственный *результат*. Такая модель может отображать как вероятностную систему (тогда она является некоторым ее упрощением), так и детерминированную.
- Дефицитность ресурсов** – фундаментальное понятие *теории оптимизационного моделирования* (термин “дефицитный” означает ограниченный). Указанная теория исходит из тезиса о закономерной ограниченности *ресурсов* в экономике.
- Диверсификация – внутриотраслевого выпуска продукции** – увеличение количества производимых модифицированных изделий, целью которой является как можно более полное удовлетворение потребностей отдельных групп потребителей.
- Диверсификация – производства продукции** – расширение номенклатуры выпускаемой продукции за счет одновременного развития многих не связанных друг с другом производств.

- Диверсификация специализации предприятия** – расширение ассортимента выпуска за счет объединения производств разных отраслей промышленности, которые технологически не связаны между собой.
- Динамическая модель** – *модель*, описывающая экономику в его развитии (в отличие от статической модели, характеризующей ее *состояние* в определенный момент).
- Динамическое программирование** – раздел *математического программирования* – совокупность приемов, позволяющих находить оптимальные решения, основанные на вычислении последствий каждого *решения* и выработке оптимальной *стратегии* для последующих решений.
- Дискретное программирование** – раздел *математического программирования* – методы решения экстремальных задач, в которых на исходные переменные накладывается условие целочисленности.
- Дискретность производственных мощностей** – отдельные значения величин производственной мощности конвейерных потоков, специализирующихся на выпуске определенного вида продукции.
- Дополнительная переменная** – (*искусственная*) переменная, которая вводится в модель для приведения ее к каноническому виду.
- Дополнительные ограничения** – ограничения которые накладываются на отдельные переменные или на их группы. Обычно они формулируются в виде неравенств, ограничивающих “снизу” или “сверху” объемы производства отдельных видов продукции, использующих дефицитные ресурсы.

З

- Задание коэффициентов пропорциональности** – один из приемов моделирования, обеспечивающий соблюдение требуемых соотношений (установления пропорций) между искомыми переменными.

- Задача замены оборудования** – динамическая задача определения порядка и сроков замены оборудования во времени, при которых затраты на замену и обслуживание минимальны.
- Задача оптимизации загрузки оборудования** – задача определения объемов выпуска продукции в зависимости от мощности и типа используемого технологического оборудования.
- Задача оптимизации загрузки оборудования предприятия** – задача рационального распределения работ между цехами предприятия.
- Задача оптимизации загрузки оборудования цеха** – задача рационального распределения работ между установленным в цехе технологическим оборудованием и станками.
- Задачи массового обслуживания** – задачи целью которых являются анализ процесса образования очередей, взаимосвязей между их основными характеристиками и выявление наилучших путей управления ими.
- Задачи о раскрое** – задачи рационального раскроя материалов (прутков, листов, рулонов). План раскроя этих материалов считается оптимальным, если он обеспечивает необходимый выход заготовок при наименьшем количестве получаемых отходов.
- Задачи распределения ресурсов** – задачи выбора наилучшего варианта распределения лимитированных ресурсов, при котором максимизируется величина получаемой прибыли или минимизируются затраты.
- Задачи упорядочения и согласования** – задачи выбора дисциплины очереди в соответствии с некоторым выбранным критерием функционирования системы, стремящимся достичь экстремаль-

ного значения. Таким критерием может быть время обслуживания, издержки, связанные с переналадкой оборудования и др.

Задачи управления запасами

– задачи оптимизации управления поступающими ресурсами, их хранения и потребления. Целью решения задачи является минимизация потерь от дефицита, затрат на складские операции, убытков порчи при хранении и морального старения.

Закрытая модель

– *модель, у которой нет входов и выходов* (либо они признаются неизменными и потому не принимаются во внимание при анализе). Моделируемая *система* принимается как бы изолированной от внешней среды (такая система называется *замкнутой* или *закрытой*).

Затраты–выпуск

– отражаемые в модели коэффициенты двух видов: выпускаемые продукты (обычно эти компоненты положительные), сырье и материалы, затрачиваемые на производство (отрицательные).

И

Избыточный ресурс

– это ресурс, увеличение количества которого, не дает прироста, величены получаемой прибыли.

Ингредиенты технологического способа

– обобщенное название различных *элементов*, набор которых служит характеристикой *технологического способа*; включает в себя виды сырья, продукции, услуг, труда (разной квалификации), типы производственных мощностей, природные ресурсы и т. д.

Имитационная модель

– *экономико-математическая модель* изучаемой *системы*, предназначенная для использования в процессе *машинной имитации*.

- Инвестирование в производство** – долгосрочное вложение финансовых средств в развитие предприятий.
- Инвестирование в развитие отрасли** – инвестирование финансовых средств в реконструкцию и развитие предприятий отрасли.
- Интервал изменения параметров** – предел варьирования входных параметров модели без существенного отклонения от оптимума и без значительного нарушения структуры базиса, формирующего оптимальное решение.
- Интерпретация** – перевод. В экономико-математическом моделировании интерпретация результатов экспериментальных расчетов – их экономическое толкование.
- Искусственные переменные** – переменные, которые показывают количество не используемых ресурсов или количество той продукции, которую можно выпустить сверх плана.
- Исследование операций** – прикладная научная дисциплина, обычно рассматриваемая как раздел науки об управлении и занимающаяся разработкой и использованием математических моделей и методов оптимизации для решения организационно-экономических и некоторых других задач. Суть методологии исследования операций состоит в анализе альтернативных вариантов использования ресурсов и их количественной сравнительной оценке по заданному критерию. Выбор определенного способа (стратегии) и есть решение задачи.

К

- Каналы обслуживания** – устройства (агрегаты, линии), способные в данный момент времени обслужить лишь одно требование. Пропускная способность канала – один из определяющих параметров при решении задачи массового обслуживания.

- Кластерный анализ** – метод многомерного анализа, дающий возможность разбить исследуемую совокупность на отдельные классы, так, что элементы одного класса находятся на близком расстоянии друг от друга, в то время как разные классы достаточно удалены друг от друга.
- Комплектность выпуска деталей** – одно из условий обеспечения сбалансированности выпуска отдельных деталей для производства комплектных изделий. При раскрое листовых материалов на отдельные детали комплектность деталей является одним из условий составления комплектов с учетом дефицита заготовок.
- Конструктивный компромисс** – введение в модель некоторых абстрактных смысловых структур и принятие ряда необходимых допущений и упрощений.
- Концевые остатки** – потери при раскрое рулонных материалов в следствие нерациональности концевых остатков рулонов.
- Концептуальная модель** – принципиальная основа *экономико-математической модели*, предназначенная для реализации различными математическими и техническими средствами для непосредственного решения задачи. Это предварительное, приближенное представление о рассматриваемом объекте или процессе. Часто концептуальная модель имеет вид схемы, в которой фиксируются наиболее существенные параметры и связи между ними. На этом этапе ограничиваются обычно не количественными, а качественными категориями.
- Корректирование результатов расчетов** – внесение в матрицу модели необходимых изменений и дополнений, на основе анализа полученных результатов.
- Корреляционный анализ** – ветвь статистического анализа, которая изучает взаимосвязи между изменяющимися величинами. Взаимосвязь может быть полной (т. е. функциональная) и неполной, когда зависимость связанных

величин искажена влиянием посторонних, дополнительных *факторов*.

Коэффициенты пропорциональности – коэффициенты, которые вводятся в матрицу модели для использования в дополнительных и вспомогательных ограничениях.

Коэффициенты связи – коэффициенты, которые обозначают связь между полученным значением переменной и ограничением.

Критерий – *признак*, на основании которого производится оценка (например, оценка *качества системы, ее функционирования*), сравнение *альтернатив* (т. е. эффективности различных решений), *классификация* объектов и явлений. Частным случаем критерия, особенно широко распространенным в экономических задачах, является *критерий оптимальности*.

Критерий оптимальности – *показатель*, выражающий предельную меру экономического эффекта принимаемого хозяйственного решения для сравнительной оценки возможных решений (альтернатив) и выбора наилучшего из них. Это может быть, например, максимум прибыли, минимум затрат, кратчайшее время достижения цели и т. д.

Л

Лаг – запаздывание – экономический *показатель*, отражающий отставание или опережение во времени одного экономического явления по сравнению с другим связанным с ним явлением.

Линейная модель – *модель*, отображающая состояние или функционирование системы таким образом, что все взаимозависимости в ней принимаются линейными. Соответственно она может формулироваться в виде

одного *линейного уравнения* или системы линейных уравнений. Причем, в ряде случаев нелинейность взаимозависимостей может приводиться к линейной форме путем математического преобразования переменных.

Линейное программирование – область *математического программирования*, посвященная теории и методам решения *экстремальных задач*, характеризующихся *линейной зависимостью* между переменными.

М

Макромодель – *экономико-математическая модель*, отображающая функционирование народного хозяйства как единого целого. При макроподходе объект (будь это народное хозяйство, отрасль, предприятие или отдельный участок) рассматривается, так сказать, снаружи как единое целое. Это означает, что внутренние связи и внутреннее устройство объекта игнорируются, а изучаются только *входные и выходные*, их взаимозависимость.

Массовое обслуживание – раздел исследования операций, который рассматривает разнообразные *процессы* в экономике. При всем своем разнообразии эти процессы имеют общие черты: *требования* на обслуживание нерегулярно (случайно) поступают на “канал обслуживания” и в зависимости от его занятости, продолжительности обслуживания и других факторов образуют *очередь* требований. Теория массового обслуживания изучает статистические закономерности поступления требований и на этой основе вырабатывает решения, т. е. такие характеристики *системы массового обслуживания*, при которых затраты времени на ожидание в очереди, с одной стороны, и на простой каналов обслуживания – с другой были бы наименьшими.

- Математическая модель** – математическое описание компонентов и функций, отображающих наиболее существенные свойства моделируемого объекта или процесса. *Математическая модель* используется как условный образ, объекта исследования, сконструированный для упрощения этого исследования. При построении модели предполагается, что ее непосредственное изучение дает новые знания о моделируемом объекте или процессе. *Математическая модель* является одним из основных инструментов исследования экономики.
- Матрица** – система элементов (чисел, функций и других величин), представленных в виде прямоугольной таблицы, над которой можно производить определенные действия (с помощью операций над их элементами): сложение, умножение на *скаляр*, умножение на матрицу, обращение, транспонирование и др. Обратные и транспонированные матрицы, имеют очень большое применение в моделях межотраслевого баланса. В них также широко применяется разбиение матрицы на меньшие подматрицы (блоки). Матрицы коэффициентов системы уравнений – инструмент решения задач математического программирования.
- Матричный метод** – метод исследования взаимосвязей между *экономическими объектами* с помощью *матричных моделей*. Основывается на математической теории *матриц*. Используется главным образом в тех случаях, когда объектом исследования являются балансовые соотношения при изучении *затрат* и *результатов* производства, материальных, денежных, транспортных и других экономических процессах.
- Машинная имитация** – экспериментальный метод изучения экономики с помощью средств вычислительной техники.
- Межлекальные выпадки** – потери от раскроя по длине и ширине рулонных материалов при раскладке.

- Межмодельный интерфейс параметров** – организация обмена информации между моделями входящими в систему моделей.
- Метод “белого ящика”** – условное название метода моделирования, когда исследователю известны внутренняя структура объекта и составляющие его элементы, на основе чего определяются количественные соотношения между его входами (выходами) и средой.
- Метод декомпозиции** – метод моделирования, основанный, на рациональном разбиении модели большой размерности на несколько взаимосвязанных моделей меньшей размерности и решения отдельных подзадач с последующим согласованием частных решений для получения общего оптимального решения.
- Метод композиции** – метод моделирования, основанный на выстраивании моделируемой экономической системы из моделей отдельных подсистем и получения единого решения на основе синтеза критериев оптимальности.
- Метод последовательного анализа вариантов** – (оценки списка состояний) – метод решения динамических задач, в основе которого лежит анализ сжатой информации, воссоздающий при необходимости требуемое значение функции.
- Метод разрешающих множителей** – метод, основанный на то, что каждой прямой задаче линейного программирования соответствует другая, симметричная ей *двойственная задача*. Если в качестве прямой принять задачу максимизации выпуска продукции, то двойственная задача заключается, наоборот, в нахождении таких *оценок* ресурсов, которые минимизируют затраты. В случае оптимального решения ее целевая функция – сумма произведений оценки (цены) каждого ресурса на его количество, равна целевой функции прямой задачи. Эта цена называется *объективно обусловленной*, или *разрешающим множителем*.

- Метод рекуррентных соотношений** – метод решения динамических задач, предполагающий определенную стратегию шагов исследуемого процесса, а также целевую функцию, критерий оптимальности которой аддитивен.
- Метод структурного моделирования** – метод структуризации исследуемой проблемы, в серию решаемых экономических задач.
- Метод “черного ящика”** – условное название метода моделирования, когда исследователю доступны лишь входные и выходные параметры рассматриваемого объекта, а его структура и процессы протекающие внутри неизвестны.
- Метод экспоненциального сглаживания** – метод прогнозирования одномерных временных рядов, который дает возможность получения прогнозных значений как всего динамического ряда в целом, так и его отдельных составляющих.
- Метод эллипсоидов** – эвристический метод решения задач линейного программирования предложенный Л.Г.Хачияном. Метод эллипсоидов совершенно отличается от большинства известных ранее методов, так как полностью игнорирует комбинаторную природу реализуемого алгоритма.
- Методы автоматической классификации** – методы кластерного анализа, которые используются тогда, когда отсутствует необходимое основание для параметрического представления искомым классов.
- Методы иерархической классификации** – методы кластерного анализа, которые используются тогда, когда необходимо получить не столько окончательный вариант разбиения исследуемой совокупности на классы, сколько общее представление о стратификации (расслоении) структуры этой совокупности.
- Множество** – множество вариантов решений, которое представляет

- допустимых решений** — всевозможные способы достижения поставленной цели.
- Множество критериев** — необходимое и достаточное число критериев, которое охватывает все важнейшие стороны решения задачи.
- Микромодель** — *экономико-математическая модель*, отражающая функционирование и структуру звена хозяйственной системы, взаимодействие его составных частей. Четкого разграничения микромоделей и макромоделей пока нет. Как правило, этот термин относится к изучению деятельности таких ведущих звеньев экономики, как предприятие и объединение.
- Многокритериальная оптимизация** — метод решения задач, которые состоят в поиске лучшего (оптимального) *решения*, удовлетворяющего нескольким несводимым друг к другу *критериям*.
- Многокритериальные задачи** — *задачи*, которые часто отождествляются с термином “*задачами векторной оптимизации*”; однако проследживается и различие: в последнем случае речь идет не о сопоставлении однородных критериев. Известен ряд способов решения многокритериальных задач:
- оптимизация одного критерия (почему-либо признанного наиболее важным);
 - упорядочение заданного множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них;
 - сведение многих критериев к одному путем введения априорных (экспертных) весовых коэффициентов для каждого из критериев (более важный критерий получает более высокий *вес*).
- Многомерная классификация** — метод обработки многомерных статистических данных, направленный на выявление характера и структуры взаимосвязей между компонентами исследуемого многомерного признака и предназначенного для проведения научных практических исследований.

- Многоэтапность производственного процесса** – последовательность этапов процесса производства начиная с этапа заготовки сырья, его переработки в полуфабрикат до получения готовой продукции.
- Моделирование** – исследование объектов или процессов с помощью моделей. Включает в себя построение, изучение, проверку и применение моделей. Является мощным инструментом научного познания и решения практических задач. Широко используется как в научной области, так и народном хозяйстве.
- Модель** – такой, материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект–оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте–оригинале. *Модель* используется как условный образ, созданный для упрощения процесса исследования.
- Модель внутрицехового распределения ресурсов** – модель оптимального распределения ресурсов между отдельными технологическими процессами (технологическими способами) внутри цеха.
- Модель выбора проекта** – модель выбора проекта распределения инвестируемых финансовых средств между отдельными промышленными предприятиями в течение определенного периода времени.
- Модель оптимальной сложности** – модель, всякое дальнейшее увеличение размерности которой за счет введения дополнительных переменных и задания ряда ограничений не может существенно повлиять на точность полученных результатов.
- Модельная конструкция** – строение экономико-математической модели из отдельных конструктивных элементов.
- Модельный эксперимент** – одна из основных форм выполнения экспериментальных расчетов, при которой преднамеренно изменяются условия функционирования модели, собираются и систематизируются данные о ее “поведении”.

- Модернизация предприятия** – замена физически изношенных, устаревших станков и технологического оборудования предприятия.
- Модификация матрицы** – преобразование целевой функции матрицы многокритериальной модели задачи в одно из ограничений.
- Мощность многоэтапного размещения производства** – оптимальная величина вариантов дискретной мощности размещения предприятий на отдельных этапах процесса производства.

Н

- Назначение величины уступки** – сначала находится решение по одному из критериев, а затем уже назначается 5 % уступка, и задача решается по другому критерию.
- Неотрицательность переменных** – одно из условий, допускающее получение любого положительного количества выпускаемой продукции, и в принципе исключающее ее какое-либо отрицательное значение.
- Нормализация критериев оптимальности** – приведение критериев к единому, безразмерному масштабу измерений.
- Нормативная модель** – модель, предназначенная для нахождения желательного состояния *объекта*, например *оптимального*. Поскольку желательное состояние должно быть реальным и исходить из возможностей развития *системы*, нормативные модели должны сочетаться с *дескриптивными моделями*.
- Нормативные коэффициенты** – коэффициенты затрат и выпуска продукции. *Нормативные коэффициенты затрат* указывают, какое количество ресурсов и какого вида затрачивается на производство единицы продукции. *Нормативные*

коэффициенты выпуска продукции определяются в основном с использованием технологических карт производства продукции.



- Область допустимых решений** – одно из понятий математического программирования, *область* в пределах которой осуществляется выбор решения.
- Область компромисса** – область поиска многокритериальных решений. Выделение *области компромисса* из *области допустимых решений* является первым этапом решения многокритериальных задач.
- Область согласия** – область, в которой каких-либо противоречий между критериями не существует. Качество полученного решения в случае необходимости может быть одновременно улучшено по всем критериям без снижения уровня любого из критериев.
- Объективно обусловленные оценки** – *двойственные оценки*.
- Ограничения модели** – запись условий, в которых действительны расчеты использующие эту модель. Обычно представляя собой систему уравнений и неравенств, они в совокупности определяют *область допустимых решений (допустимое множество)*. Совместность системы ограничений – обязательное условие разрешимости модели: в случае несовместимости этой системы допустимое множество является пустым.
- Ограничения правых частей** – *ограничения модели*.

- Ограниченность ресурсов** – *дефицитность ресурсов.*
- Одномерный раскрой** – раскрой линейных форм (труб, профиля, уголков, прутков, арматуры, досок) с наименьшим количеством получаемых отходов.
- Описательная задача** – *экономико-математическая задача*, цель которой состоит в нахождении наилучшего (в соответствии с каким-либо критерием) распределения наличных ресурсов. Решается с помощью *оптимизационных моделей* методами *математического программирования* т.е. путем поиска *максимума* некоторых *функций* или *функционалов* при заданных *ограничениях* (условия оптимальности) и без ограничений – безусловная оптимизация.
- Описательная модель** – *экономико-математическая модель*, которая охватывает некоторое число вариантов (*технологических способов*) производства, распределения или потребления для выбора таких значений *переменных*, характеризующих эти варианты, чтобы был найден лучший из них.
- Определение области компромисса** – установление области достижения конструктивного компромисса в принятии решений.
- Оптимальная стратегия** – стратегия принятия многокритериального решения, которая отвечает двум важнейшим условиям: стратегия осуществима, т.е. принадлежит некоторому множеству решений и наилучшая в смысле принятого в задаче принципа компромисса.
- Оптимальное решение** – *решение.*
- Оптимальность** – нахождение наилучшего варианта пространственных

- варианта размещения** перспектив развития. Выбор места строительства новых предприятий или реконструкции уже действующих, определение масштабов выпуска продукции. Нахождение одного из эффективных вариантов размещения, позволяющего как можно более полно учесть влияние важнейших производственных факторов.
- Оптимальный вариант специализации** – вариант специализации, учитывающий технические и технологические возможности предприятия.
- Оптимальный план** – наилучший с точки зрения выбранного *критерия* вариант развития экономики в целом или отдельного хозяйственного объекта.
- Оптимизационная задача** – *оптимальная задача*.
- Оптимизационная модель** – *оптимальная модель*.
- Оптимизация** – *процесс* нахождения *экстремума функции*, т. е. выбор наилучшего варианта из множества возможных, процесс выработки оптимальных *решений* или приведения *системы* в наилучшее (оптимальное) *состояние*.
- Оптимизация ассортимента продукции** – выбор варианта расширения и обновления ассортимента продукции с учетом организационно-технологических особенностей производства и имеющегося спроса.
- Оптимизация загрузки взаимозаменяемого оборудования** – перераспределение работ между цехами и участками предприятий оснащенных универсальным технологическим оборудованием и станками.

- Оптимизация загрузки не-взаимозаменяемого оборудования** – перераспределение работ между цехами и участками предприятия, оснащенными специализированным технологическим оборудованием и станками.
- Оптимизация состава смеси** – расчет состава смеси, содержащей необходимый набор ингредиентов, затраты на получения которой должны быть минимальными.
- Основные ограничения** – *ограничения*, которые накладываются на все или большинство переменных модели. Они выражают основные технико-экономические условия задачи.
- Основная переменная** – *переменная*, показывающая количество продукции, которая должна быть произведена с использованием альтернативных технологических способов в соответствии с оптимальным планом.
- Открытая модель** – *модель*, в которой учитывается взаимодействие моделируемого объекта с окружающей средой (внешние связи), в отличие от *закрытой модели*, где такие связи не принимаются во внимание.
- Относительная уступка** – *уступка*, при которой суммарный относительный уровень снижения качества одного или нескольких критериев не превосходит суммарного уровня повышения качества по остальным критериям.
- Очередь требований** – последовательность поступающих в систему *требований (заявок)* на обслуживание, которые застав каналы занятыми, не выбывают, а ожидают их освобождения (затем они обслуживаются в том или ином порядке). Очередью можно назвать также и совокупность ожидающих (простаивающих) каналов системы массового обслуживания. Это важнейшее понятие *теории очередей* (как одного из разделов теории массового обслуживания). Процесс образования очередей носит случайный характер.

П

- Параметрическое программирование** – раздел математического программирования – методы решения оптимизационных задач, коэффициенты целевой функции которых или числовые характеристики ограничений либо те и другие, не постоянные величины, а функции зависящие от ряда параметров.
- Переменная модели** – переменная величина, включенная в *модель* и принимающая различные значения в процессе *решения* *экономико–математической задачи*.
- Подготовительный запас** – запас, который необходим на время подготовки, поступающих на предприятие материалов к использованию в процессе производства.
- Последовательная уступка** – процедура построения компромиссного решения, которая предполагает, что сначала ищется решение, обращающее в максимум главный показатель эффективности. Затем исходя из практических соображений назначается некоторая уступка, позволяющая обратить в максимум второй показатель.
- Постулат аддитивности** – для распределяемых производственных ресурсов совокупность технологических способов является полной в том смысле, что полный расчет ресурсов может быть сделан по каждому из способов. Точнее, общий объем любого из распределяемых между производственными способами ресурсов, равен их суммарному количеству в процессе производства.
- Постулат неотрицательности** – для моделируемого производственного процесса выпуска продукции, допускается любое положительное число получаемой продукции, какое-либо их отрицательное количество в принципе исключается.
- Постулат о пропорциональности** – для формализуемого в модели процесса производства объем выпускаемой продукции *пропорционален*

количеству потребляемых ресурсов. Другими словами, объем выпуска продукции и количество потребляемых ресурсов могут быть при необходимости увеличены или уменьшены при сохранении их взаимной *пропорциональности*.

- Потери от поставок** – общие потери производства, которые включают потери от хранения сырья на складе и потери от дефицита.
- Правило трансформации** – правило преобразования задачи линейного программирования в двойственную задачу и, наоборот, в исходную.
- Прескриптивная модель** – *модель*, которая дает возможность выдвинуть ряд рекомендаций относительно того, как желательнее было бы действовать в идеализированной ситуации.
- Прикладная модель** – *модель*, которая применяется для решения конкретных экономических задач (модели экономического анализа, прогнозирования, управления).
- Принцип гибкого учета** – *принцип*, предполагающий необходимость обязательного задания количественных характеристик критериев, что дает возможность более “справедливого” учета “интересов” по каждому из критериев.
- Принцип жесткого учета** – *принцип*, в соответствии с которым значимость критериев, степень их важности располагается в строгой последовательности.
- Принцип квазиравенства** – *принцип*, в соответствии с которым решение считается наилучшим, если значения отдельных локальных критериев отличаются друг от друга не больше чем на величину возможного отклонения.
- Принцип максимина** – *принцип*, в соответствии с которым равенство критериев достигается за счет “подтягивания”

наихудшего из критериев (значение которого наименьшее). Данный принцип часто называют принципом “гарантированного уровня”.

Принцип равенства – *принцип*, в соответствии с которым наилучшим компромиссным решением считается такое, при котором достигается равенство всех локальных критериев.

Приоритет критериев – определяемый порядок *критериев* в соответствии со степенью их значимости (важности).

Пространственная модель – *модель*, в которой учитываются пространственные (территориальные) факторы и условия.

Р

Робастность алгоритма – *алгоритм* численного метода, отличающийся высокой надежностью и точностью производимых расчетов, при которых становится невозможным получение не верных результатов или выполненные расчеты не точны.

Равновесная цена – граничная цена, при которой целевая функция будет увеличиваться, если потребляемый ресурс приобретается по более низкой цене, и уменьшатся, если цена на ресурс будет возрастать.

Размещение многопрофильной продукции – задача размещения производства, ориентированного на выпуск различного вида продукции. При решении задачи оптимизируется мощность предприятия и транспортные потоки нескольких видов продукции.

Раскрой листовых материалов – раскрой плоских материалов, листов металла, резины, пластмассы, стекла, картона, обеспечивающий получение максимального числа деталей.

- Раскрой рулонных материалов** – рациональный раскрой рулонов тканей, искусственной кожи, пластмасс, металла, обеспечивающий необходимый выход заготовок, при наименьших потерях раскладок по длине и ширине.
- Распределение ресурсов** – одно из основных понятий экономико-математического моделирования, предполагающее возможность оптимального *распределения* сырья, материалов, топлива, электроэнергии, воды, финансовых средств, оборудования, транспорта, рабочей силы, машинного времени и т. д. в решаемых задачах.
- Распределение ресурсов на предприятии** – задача оптимального распределения ресурсов между производственными цехами.
- Регрессионный анализ** – метод исследования регрессионной зависимости между величинами по данным статистических наблюдений. Метод *регрессионного анализа* состоит в нахождении уравнения регрессии (включая оценку его параметров), с помощью которого находится средняя величина случайной переменной, если величина другой (или других в случае множественной или многофакторной регрессии) известна.
- Результат** – в экономико-математическом моделировании то же, что *исход*, следствие реализации некоторого решения, принятия *альтернативы* выбора.
- Рекуррентные соотношения** – соотношения функциональных зависимостей расчетных величин динамической модели, позволяющие свести проведение сложных вычислений к выполнению ряда отдельных расчетов.
- Ресурсы** – в экономико-математическом моделировании этим термином обозначают не только сырье, землю, труд, но и *продукцию*, поскольку продукция одной отрасли или производства – ресурс для другой. Общее свойство ресурсов – потенциальная возмож-

ность их участия в производстве и потреблении.



- Само-организующаяся система** – *адаптирующаяся система*, в которой накопление информации выражается в изменении *структуры системы*.
- Свобода выбора** – это, ни что иное, как наличие некоторого числа альтернативных вариантов принятия решений.
- Симплексный метод** – вычислительная процедура, основанная на принципе последовательного улучшения решений – переход от одной базисной точки к другой, для которой значение *целевой функции* больше.
- Синтез** – метод исследования, в известном смысле обратный *анализу*, т. е. имеющий целью объединить отдельные элементы.
- Система уравнений** – совокупность равенств, справедливых только для определенных групп значений неизвестных.
- Специализация предприятий** – повышение технологической однородности производства, сокращение номенклатуры выпускаемой продукции.
- Срок выполнения заказа** – момент времени от размещения заказа на поставку сырья и материалов до их поставки на предприятия.
- Статистическое моделирование** – метод компьютерной имитации изучаемого процесса, который копирует на компьютере моделируемый процесс с всякого рода различными случайностями, которые его сопровождают.
- Статическая модель** – *экономико-математическая модель*, в которой все зависимости отнесены к одному моменту *времени*.

Таковыми моделями могут описываться *статические системы*, но также и *динамические системы* путем характеристики их *состояний* в заданный момент.

- Стохастическая модель** – такая *экономико-математическая модель*, в которой *параметры*, условия функционирования и характеристики *состояния* моделируемого объекта представлены *случайными величинами* и связаны *стохастическими* (т. е. случайными, нерегулярными) зависимостями, либо исходная *информация* также представлена *случайными величинами*.
- Стратегия управления запасами** – свод выработанных правил, на основе которых принимаются решения относительно объемов и сроков поставок.
- Страховой запас** – запас, который предназначен для бесперебойного обеспечения производства сырьем и материалами при отклонениях от принятых интервалов поставок.
- Строительство новых предприятий** – введение новых производственных мощностей, созданных на основе последних достижений научно-технического прогресса.
- Структура системы** – организация связей и отношений между подсистемами и элементами системы, а также состав этих подсистем и элементов, каждому из которых обычно соответствует определенная функция.
- Структурная модель** – *модель*, используемая в исследованиях на макроэкономическом уровне для планирования и управления народным хозяйством, изучения взаимосвязей отдельных отраслей производства.
- Схема компромисса** – *схема* поиска оптимального решения многокритериальной задачи. Число возможных схем компромисса может быть очень велико и его трудно предусмотреть заранее. Выбор схемы компромисса является довольно сложной концептуальной проблемой.

Т

- Текущий запас** – запас, который предназначен для обеспечения бесперебойной работы производства в период между двумя очередными поставками.
- Теоретико-аналитическая модель** – *модель*, используемая в исследовании общих свойств и закономерностей экономических процессов.
- Теория оптимального моделирования** – теоретическое обоснование наиболее эффективного состояния функционирования экономики, при котором достигается наилучшее (оптимальное) использование всех ресурсов общества (природных, трудовых, производственных и т. д.).
- Теория поиска** – математическая *теория* оперативного управления обеспечения предприятий народного хозяйства наличными ресурсами с учетом текущих изменений спроса и источников его поставок.
- Технологическая заменяемость ресурсов** – возможность замены ресурсов на всех стадиях процесса производства.
- Технологический способ** – общее понятие моделирования, объединяющее два: технологический способ производства (производственный способ, технология) и технологический способ потребления; совокупность основных характеристик (*ингредиентов*) процесса производства (соответственно – потребления) того или иного *продукта*. В экономико-математической модели технологический способ описывается системой присущих ему чисел (*вектором*) – например, нормы затрат и выпуска различных ресурсов в единицу времени или в расчете на единицу *продукции* и т. п. Кратность использования технологического способа

Кратность использования технологического способа называется *интенсивностью*. Она может измеряться количеством выпускаемой продукции или объемом какого-либо затрачиваемого ресурса и т. д.

- Точечная модель** – упрощенная модель *экономической системы* без учета процессов транспортировки, связанных с тем, что предприятия промышленного производства распределены по территории всей страны.
- Точка возобновления заказа** – точка на графике показывающая момент времени, когда следует возобновить заказ на поставку сырья и материалов на предприятия.
- Тренд** – длительная (“вековая”) тенденция изменения экономических показателей.



- Унифицированный код задачи** – шестизначный код задачи теории массового обслуживания, который характеризуется потоком требований, распределением времени обслуживания, числом каналов обслуживания, дисциплиной очереди требований, максимальным числом требований, емкостью источника требований.
- Управление запасами** – *модели и методы* используемые для *оптимизации запасов*, т. е. *ресурсов*, находящихся на хранении и предназначенных для удовлетворения спроса на эти ресурсы. Термины “ресурсы” и “запасы” здесь понимаются широко: можно говорить о запасах конечной продукции, о запасах полуфабрикатов (тогда соответственно задача будет задачей об оптимизации незавершенного производства), о запасах сырья, природных и трудовых ресурсов, денежных средств и т. д. В качестве целевой функции в задачах управления запасами выступают суммарные затраты

на содержание запасов, на складские операции, потери от порчи при хранении и моральное старение, потери от дефицита и штрафы и т. п. *Управляемые переменные* в таких задачах являются объем запасов, частота и сроки их пополнения (путем производства, закупки и т. п.), степень готовности продукции, хранящейся в виде запасов и др.

Установление диапазона изменения ограничений – установления границ изменения ограничений лимитированных ресурсов.

Устойчивость оптимального решения – одно из условий, при котором изменение коэффициентов целевой функции, ограничений правой части и технологических коэффициентов не приводит к изменению оптимального решения.

Учет приоритета критериев – принятие во внимание значимости отдельных критериев, их первостепенной важности.



Формализация модели массового обслуживания – описание задачи выбора оптимального варианта организации производственного процесса в терминах массового обслуживания.

Формула Уилсона – формула определения оптимального объема поставляемой партии заказа сырья и материалов.

Функционал оптимальной задачи – *Целевая функция.*

Функциональная модель – *модель, которая описывает поведение системы безотносительно к ее внутренней структуре. При изучении этой модели возникают гипотезы о причинах тех или иных реакций моделируемого объекта на воздействия внешней среды и, таким образом,*

открывается путь к *анализу* его структуры и формированию структуры моделей.

При изучении функциональных моделей возникают *гипотезы* о причинах тех или иных реакций объекта на *воздействие* внешней среды и, таким образом, открывается путь к *анализу* его структуры и формированию структурных моделей.

Функция дефицита – величина дефицита сырья, определенная как разность суммы объема поставок сырья и величины страхового запаса, и дневной потребности предприятия в сырье.

Ц

Целевая функция – *функция цели*, наибольшее или наименьшее экстремальное значение которой ищется в задачах *экономико-математического моделирования* с учетом заданных ограничений.

Цикл замены оборудования – периодичность замены оборудования в планируемом периоде. Возраст эксплуатации оборудования при этом, отсчитывается в прямом направлении, а этапы на которые разбит процесс в обратном.

Э

Эвристическая модель – *модель*, которая построена на основании полученного опыта и интуиции. Используемые при этом, приемы и методы построения модели и нахождения сходных задач прежде, допущенных ошибок, а также интуиции.

Экзогенные переменные – *переменные величины*, внешние по отношению к моделируемой *системе*.

- Экономическая заменяемость** – возможность замены одних видов ресурсов другими с необходимой экономической эффективностью.
- Экономико-математическая модель** – математическое описание экономического *процесса* или *объекта*, произведенное в целях их исследования и управления ими.
- Экспоненциальное – сглаживание временных рядов** – модификация *метода наименьших квадратов* для анализа *временных рядов*, при которой более поздним *наблюдениям* придается больший *вес*, иными словами веса точек ряда убывают (экспоненциально) по мере удаления в прошлое.
- Элемент** – составная часть сложного целого, которая рассматривается без дальнейшего членения как единое целое; его внутренняя *структура* не является предметом исследования.
- Элемент системы** – часть *системы*, которая рассматривается без дальнейшего членения как единое целое; его внутренняя *структура* не является предметом исследования. Выбор элемента как первичной единицы определяется характером и задачами *модели* системы. В зависимости от целей и задач исследования такими первичными элементами в одном случае может быть отрасль, в другом – предприятие; при моделировании предприятия – цех, участок, рабочее место.
- Эмерджентные свойства** – свойства *целостности системы*, т. е. такие, которые не присущи составляющим ее *элементам*, рассматриваемым отдельно, вне системы. В экономике в качестве эмерджентных свойств рассматриваются, например, создание интегрированных технологических систем взаимосвязанных производств. Следовательно, это эффект организации, который является результатом возникновения между элементами *синергических связей*.

Словарь терминов

- Эндогенные величины** – *переменные*, изменение которых происходит внутри моделируемой *системы*, в отличие от экзогенных, которые вводятся в модель, извне.
- Энтропия** – *неопределенность*.
- Эффект** – *экономический эффект*.
- Эффект эмерджентности** – результат оптимального (равновесного) распределения ресурсов на предприятии между отдельными цехами.
- Эффективная технология** – *технологический способ*, для которого характерно наиболее экономное преобразование *ресурсов* в *продукты*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аганбегян А.Г., Багриновский К.А., Гранберг А.Г.* Система моделей народно-хозяйственного планирования. – М.: Мысль, 1972. – 352 с.
2. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ: Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1963. – 500 с.
3. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
4. *Афифи А., Эйзер С.* Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 488 с.
5. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М., 1984. – 376 с.
6. *Баумоль У.* Экономическая теория и исследование операций: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1965. – 496 с.
7. *Важонья А.* Научное программирование в промышленности и торговле: Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 388 с.
8. *Введение в теорию и методологию системы оптимального функционирования экономики/* Под ред. Н.П. Федоренко, Ю.В. Овсиенко, Н.Я. Петракова. – М.: Наука, 1983. – 368 с.
9. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей: Пер. с англ. – М.: Изд-во иностран. литература, 1963. – 418 с.
10. *Голенко Д.И., Дакелин А.И., Ливищ С.Е.* Моделирование в технико-экономических системах. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1975. – 424 с.
11. *Даницг Дж.* Линейное программирование его применение и обобщение: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
12. *Джонстон Дж.* Эконометрические методы: Пер. с англ. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.
13. *Дюран В., Оделл П.* Кластерный анализ. – М.: Статистика, 1977. – 128 с.
14. *Елкин В.Н., Загоруйко Н.Г.* Количественные критерии качества таксономии и их использование в принятии решений. – Новосибирск: Наука, 1969. – 82 с.

Список литературы

15. *Иберла К.* Факторный анализ. – М.: Статистика, 1980. – 390 с.
16. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1975.
17. *Канторович Л.В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 412 с.
18. *Канторович Л.В., Горстков А.В.* Математическое оптимальное программирование в экономике. – М.: Знание, 1968. – 328 с.
19. *Ланкастер К.* Математическая экономика: Пер. с англ. – М.: Советское радио, 1972. – 464 с.
21. *Лопатников Л.И.* Экономико-математический словарь. – М.: Наука, 1987. – 512 с.
22. *Лурье А.Л., Нит И.В.* Экономико-математическое моделирование социалистического хозяйства. – М., Изд-во Моск. ун-та, 1973. – 284 с.
23. *Математический инструментарий в экономических исследованиях* / Под ред. Г.М. Мкртчяна. – Новосиб. ун-т, Новосибирск, 1990. – 110 с.
24. *Моделирование производственных процессов на предприятии:* Сокр. пер. с немец. /Под общей ред. В.М. Савинкова. – М.: Прогресс, 1972. – 336 с.
25. *Моделирование процессов в природно-экономических системах* / Отв. ред. В.И. Гурман, А.И. Москаленко. – Наука. Сиб. отд-ние, 1982. – 382 с.
26. *Моделирование процессов управления промышленным производством* / Под ред. Н.Б. Миронецкого. – М.: Наука, 1981. – 136 с.
27. *Немчинов В.С.* Избранные произведения. – М.: Наука, 1968. – 428 с.
28. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.
29. *Полищук Л.И.* Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. – Новосибирск: Наука, 1988. – 232 с.
30. *Прокопов С.В.* Введение в экономико-математическое моделирование промышленного производства: Конспект лекций. – К.: КНУТД, 2001. – 90 с.
31. *Прокопов С.В.* Моделирование оптимального распределения ресурсов в промышленном производстве: Конспект лекций. – К.: КНУТД, 2002. – 80 с.
32. *Прокопов С.В.* Организационно-технологические альтернативы межотраслевой интеграции предприятий кожевенной промышленности. – К.: Ин-т экономики НАН Украины, 1998. – 146 с.
33. *Прокопов С.В.* Экономико-математическое моделирование промышленного производства: Учеб. Пособие для студентов. – К.: Ин-т экономики НАН Украины, 2003. – 202 с.

34. *Рубинов А.М.* Математические модели расширенного воспроизводства. – Л., 1983. – 186 с.
35. *Сахал Д.* Технический прогресс: концепции, модели, оценки: Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 366 с.
36. *Тинбэрхэн Я., Бос Х.* Математические модели экономического роста: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1967. – 312 с.
37. *Фельс Э., Тинтнер Г.* Методы математической экономики: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1971. – 266 с.
38. *Роберт О. Фергюсон, Лоурен Ф. Саржент.* Линейное программирование: методы и применение: Пер. с англ. – М.: Госстатиздат, 1962. – 336 с.
39. *Шаттелес Т.* Современные эконометрические методы: Пер. с румын. – М.: Статистика, 1975. – 212 с.
40. *Экланд И.* Элементы математической экономики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 248 с.

Навчальне видання

Прокопов Сергій Васильович

**ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ
МОДЕЛЮВАННЯ
У ВИРОБНИЧОМУ МЕНЕДЖМЕНТІ**

Підручник

(Рос. мовою)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

О.М. Оніщенко, доктор економічних наук, професор,
академік НАН України;

Л.К. Безчастний, доктор економічних наук, професор,
член-кореспондент НАН України;

В.О. Точилін, доктор економічних наук, професор.